

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología



**APLICACIONES DE
TOPOLOGÍA GEOMÉTRICA Y ALGEBRAICA
AL ESTUDIO DE FLUJOS CONTINUOS
EN VARIEDADES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

Jaime Jorge Sánchez Gabites

Bajo la dirección del doctor
Jose Manuel Rodriguez Sanjurjo

Madrid, 2009

ISBN: 978-84-692-6748-6

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

**APLICACIONES DE
TOPOLOGÍA GEOMÉTRICA Y ALGEBRAICA
AL ESTUDIO DE FLUJOS CONTINUOS
EN VARIEDADES**

Memoria presentada por D. Jaime Jorge Sánchez Gabites
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Dirigida por D. José Manuel Rodríguez Sanjurjo
Catedrático de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Abril de 2008

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que me han traído hasta aquí y sin duda algunas quedarán sin mencionar, bien de modo inadvertido o también, acaso, deliberado. Pero vamos a ello.

Un agradecimiento obligado es a Pepe Sanjurjo, no sólo por los conocimientos matemáticos que me ha transmitido (y su visión de cómo se hacen matemáticas) sino, sobre todo, por la paciencia que ha tenido con mi caprichosa forma de trabajo y la extraordinaria libertad que me ha concedido en lo que se refiere a la temática de la tesis, su enfoque y, en fin... casi todo.

Naturalmente, a mi familia. Aquí hay luces y sombras; las cosas no han sido (ni son) fáciles, pero mi vida se hace más pequeña sin ellos, que son el cauce de aquel río en el cual Heráclito dice que no se puede entrar dos veces siendo el mismo. Muy en especial a quienes he perdido por el camino, han visto el comienzo y no han esperado al final.

A mis amigos. No sólo los compañeros de Facultad, que hicieron que el paso por la misma consistiese, sobre todo, en buen humor, sino también a los de muchos otros ámbitos, que han tenido siempre palabras de aliento para mí. En particular, tengo el compromiso de poner un asterisco, que aquí va: *. Y además me voy a permitir mencionar en concreto a quién va dedicado: a Margarita Jiménez Garbayo, de quien sólo diré que es de aquellas personas que iluminan la vida de quienes les rodean.

A mi pobre vecino de despacho, Marco, creo que más que agradecimientos le debo disculpas por el tiempo que le he hecho perder, bien sea hablando de matemáticas o de otras historias, muchas veces rayanas en el absurdo de la locura. A Álvaro debo agradecerle estar entregando la tesis ahora.

A Manolo (a quien puede encontrarse sumergido como Z -conjunto en el cubo de Hilbert) y Paco les debo agradecer, creo, haberme enseñado las normas pertinentes de etiqueta en congresos y demás acontecimientos de naturaleza formal. Sin duda alguna llegaré muy lejos siendo fiel a sus exquisitas indicaciones.

Índice general

Introducción	3
Requisitos previos y notación	7
1. Bloques aislantes regulares	13
1.1. Existencia de bloques aislantes regulares	14
1.2. Cilindros	18
1.3. Final de la prueba del Teorema 1.2	21
1.4. Aplicaciones	25
1.5. Unicidad de bloques aislantes regulares	27
1.6. Generalización a variedades con borde	31
2. Caracterización de los compactos invariantes con <i>shape</i> trivial	33
3. Flujos en torno a compactos de <i>shape</i> trivial	39
3.1. Homotopías aproximativas	40
3.2. <i>st</i> -equivalencias de flujos	43
3.3. El índice local	45
3.4. Modelos para las clases de <i>st</i> -equivalencia	54
3.5. Descomposiciones de la esfera	59
3.6. Aplicación práctica al estudio de flujos	65
3.7. Sobre la utilización de la Conjetura de Poincaré	68
3.8. Observaciones finales	69
4. Atractores sin explosiones externas	73
4.1. Bloques aislantes regulares para atractores sin explosiones externas . . .	74
4.2. Descripción dinámica de la región de atracción	76
4.3. Propiedades cohomológicas	79
4.4. Atractores sin explosiones externas en superficies	85
4.5. Variedades que pueden contener atractores sin explosiones externas . . .	87
4.6. Atractores sin explosiones externas con el <i>shape</i> de \mathbb{S}^n	92
5. La dinámica en torno al borde de una región de atracción	97
5.1. Existencia de bloques aislantes regulares	98
5.2. Implicaciones sobre la dinámica global	101

6. Sobre el <i>shape</i> del borde de un atractor	105
6.1. Sobre el <i>shape</i> de ∂P	106
6.2. Condiciones suficientes para que $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$	109
6.3. Condiciones suficientes para que $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$	112
Apéndices	115
A. Entornos aislantes propios y bloques aislantes	115
A.1. Entornos aislantes propios	116
A.2. Bloques aislantes	119
B. Entornos regulares de compactos contenidos en superficies	121
Bibliografía	128

Introducción

Una muy breve semblanza histórica. Las ecuaciones diferenciales (o su contrapartida discreta, las ecuaciones en diferencias) han formado, desde su aparición (simultánea a la del cálculo diferencial y la física moderna) y hasta hoy, la herramienta básica para modelizar fenómenos de la naturaleza. Puede argüirse, no obstante, que el trabajo verdaderamente difícil comienza al estudiar su comportamiento, y esto es algo que está presente en las matemáticas desde que éstas tuvieron la potencia suficiente para analizar fenómenos tan complejos como la mecánica de fluidos, el problema de los tres cuerpos u otros.

La insuficiencia de las herramientas estrictamente analíticas queda de manifiesto hacia mediados del siglo XIX, y es entonces cuando hacen su aparición las dos ramas que vertebran la moderna teoría de sistemas dinámicos. Por un lado se vio la utilidad de introducir herramientas procedentes de la teoría de la medida y afines para estudiar sistemas cuya evolución preservase áreas o volúmenes (por ejemplo, casi todo punto de un flujo que preserve una medida es recurrente), y por otro se tomó conciencia gradualmente de que ciertas propiedades de las soluciones de las ecuaciones involucradas se debían a propiedades geométricas del espacio de fases (por ejemplo, todo flujo en la bola unidad cerrada tiene al menos un punto fijo). Desde esta óptica el interés se centró no tanto en las ecuaciones diferenciales propiamente dichas sino en los sistemas dinámicos a que estas daban lugar. Puede decirse, y probablemente no es históricamente injusto, que el padre de ambos enfoques (que, a grandes rasgos, se encuadran en lo que hoy son la teoría ergódica y la teoría de Morse) fue Poincaré.

A principios del siglo XX se inició un proceso de fundamentación estrictamente topológica de los sistemas dinámicos, y esto sirvió de base para el trabajo posterior de Morse, Smale y Conley, que condujo en manos de este último al desarrollo de la teoría del índice de Conley o índice homotópico. A grandes rasgos, dado un flujo continuo en una variedad compacta M , en primer lugar se localizan en él una cantidad finita de subconjuntos compactos invariantes $\{M_1, \dots, M_n\}$ de modo la trayectoria de cualquier $p \in M - \bigcup_{k=1}^n M_k$ sea una trayectoria conectante, es decir, nazca en algún M_j y vaya a morir a algún M_i con $i < j$. A continuación se asigna a cada M_i su índice de Conley, que es el tipo de homotopía de un espacio punteado y sólo depende de la dinámica local en torno a M_i , y se aplican las ecuaciones de Morse, que relacionan el polinomio de Poincaré de M con los polinomios de Poincaré de los índices de Conley de cada uno de los M_i . De este modo se obtienen estrechas relaciones entre la geometría del espacio de fases M y la dinámica local en torno a los M_i .

Aparecen así dos aspectos en este análisis. Uno global, que está ejemplificado por las ecuaciones de Morse, y otro local, que está capturado por el índice de Conley.

El contenido de este trabajo. El índice de Conley de un compacto invariante se calcula a partir de un tipo especial de entorno del mismo, llamado bloque aislante (véase la Definición A.10). Todo compacto invariante aislado (más adelante se definirá este término) posee un bloque aislante (esto es bien conocido, y se aporta una prueba en el Teorema A.11 para conveniencia del lector), pero no hay una elección canónica para el mismo y uno de los resultados claves en la teoría del índice de Conley es el que establece que este no depende del bloque aislante elegido para calcularlo. Ahora bien, si esta libertad otorga gran flexibilidad a la teoría del índice de Conley, tiene el inconveniente de que ignora la estructura topológica del compacto invariante. La filosofía que subyace a nuestro trabajo es la de distinguir unos bloques aislantes especiales (véanse las Definiciones 1.1 y 4.3) con la característica distintiva de que la inclusión del compacto invariante en el bloque aislante es una equivalencia *shape*, y que llamaremos regulares.

Los bloques aislantes regulares no existen en general, pero sí cuando el espacio de fases es una variedad topológica de dimensión no mayor que tres, y en este marco se sitúan los Capítulos 1, 2 y 3, o en situaciones dinámicas especialmente interesantes que se tratan en los Capítulos 4, 5 y 6. Además, en cada uno de estos casos sucede que hay unicidad de bloques aislantes regulares salvo equivalencia de flujos, y en este sentido la elección de los mismos es canónica y, a nivel heurístico, la teoría presenta un paralelo notable con la clásica de entornos regulares en topología lineal a pedazos (esto justifica también la elección de nomenclatura).

Los diversos capítulos de la tesis están dedicados a poner de manifiesto cómo la utilización de bloques aislantes regulares contribuye de manera positiva al estudio de los sistemas dinámicos. Por ejemplo, permite establecer propiedades topológicas de los compactos invariantes aislados, bien sea *per se* (pueden verse como ilustración el Corolario 1.19, el Teorema 2.3 y el Ejemplo 2.7) o en términos de la dinámica en sus proximidades (podemos citar aquí el Corolario 4.5, el Teorema 5.2 y su corolario, o el Ejemplo 4.20). Abundando en esta última cuestión, el Capítulo 3 está dedicado a obtener una comprensión detallada de la dinámica en torno a compactos invariantes aislados con *shape* trivial en términos de un índice, más fino que el de Conley, que llamamos índice local (Definición 3.14 y Teoremas 3.16 y 3.40). Puede considerarse una generalización topológica del teorema clásico de Hartman–Grobman.

Otro tipo de situaciones en las que los bloques aislantes regulares juegan un papel esencial tiene que ver con las interacciones entre el *shape* de un compacto invariante aislado, la dinámica en sus proximidades y la dinámica global. El Capítulo 4, casi en su totalidad, trata estas cuestiones (así por ejemplo los Teoremas 4.24 o 4.34), y también en otros lugares aparecen resultados con la misma filosofía (podemos citar aquí el Teorema 5.7).

Los Capítulos 5 y 6 utilizan el mismo tipo de técnicas para estudiar el borde de una región de atracción (situación que es dinámicamente muy sugerente, por lo que supone de zona fronteriza entre el comportamiento de atracción y el del exterior de la región de atracción) y el borde de un atractor (situación que es, ahora, topológicamente muy sugerente dada la complejidad que desde el punto de vista homotópico puede tener dicho conjunto). Son trabajo conjunto con J. M. R. Sanjurjo ([71] y [72]) y, desde el punto de vista cronológico, anteceden al contenido de los Capítulos 1 a 3, hecho este que el lector no dejará de advertir.

Incluiremos dos apéndices. El primero de ellos, que contiene material clásico y otro que no lo es tanto, tiene eminentemente la finalidad de recordar las nociones y notaciones básicas sobre bloques aislantes, así como los resultados elementales que a ellos conciernen. El segundo contiene una discusión sobre entornos regulares de compactos (no necesariamente poliedros) en superficies, y es de importancia capital para el Capítulo 1 (y en consecuencia para los dos siguientes, que se apoyan en este).

Dada la formación de quien esto escribe y el enfoque adoptado, las herramientas que se utilizarán serán todas de naturaleza eminentemente topológica. Grandes teoremas clásicos de la topología geométrica del siglo XX (empezando por la Conjetura de Poincaré, pero también el de Schönflies, el teorema del anillo, el del homeomorfismo estable, etc...) harán su aparición de manera natural. Además, la utilización de la topología algebraica y la teoría de la forma será una constante en todo el texto. Si la primera está presente en el estudio de los sistemas dinámicos desde los trabajos del propio Poincaré, la segunda fue aplicada, creemos que por primera vez, por Hastings [32] en el que ya es hoy un ejemplo clásico de manejo de los flujos para construir morfismos *shape* (Lema 0.1). Intentaremos evitar, en la medida de lo posible, utilizar técnicas propias de la topología diferencial.

Requisitos previos y notación

Los espacios topológicos M considerados por nosotros serán siempre metrizables y localmente compactos. El conjunto de entornos abiertos de $A \subseteq M$ se denotará por $\mathcal{E}_M(A)$ y, en particular, el conjunto de entornos abiertos de un punto $p \in M$ se denotará por $\mathcal{E}_M(p)$. Una *base decreciente de entornos* de $A \subseteq M$ es una sucesión $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de entornos de A tales que $\overline{N_{k+1}} \subseteq \text{int}(N_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

El interior topológico de un conjunto N se denotará por $\text{int}(N)$ o, si es necesario precisar, como $\text{int}_M(N)$ (el interior de N como subespacio de M). La frontera topológica de un conjunto N se denotará por ∂N o, si es necesario precisar, como $\partial_M N$ (la frontera de N como subespacio de M). Si no se especifica con respecto a qué espacio se toma el interior o la frontera, será porque existe una elección natural de espacio ambiente.

Un *sistema dinámico continuo* o *flujo* en un *espacio de fases* M es una aplicación continua $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\varphi(p, 0) = p$ y $\varphi(\varphi(p, t), s) = \varphi(p, t + s)$ para todos $p \in M$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Normalmente abreviaremos $\varphi(p, t)$ como $p \cdot t$, y similarmente pondremos $A \cdot J := \varphi(A \times J)$ para cualesquiera $A \subseteq M$ y $J \subseteq \mathbb{R}$.

Requisitos sobre topología

Variedades topológicas. X es una n -variedad topológica con borde (posiblemente vacío) si todo punto $p \in X$ posee un entorno abierto que es homeomorfo al espacio euclídeo \mathbb{R}^n o al semiespacio euclídeo $\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. El borde de X se denotará por ∂X y su interior por $\text{int}(X)$; aunque estas notaciones son idénticas a las de frontera e interior topológico no deberían causar confusión. Si $\partial X = \emptyset$, X es una variedad topológica *sin borde*.

La n -bola \mathbb{D}^n es la bola euclídea cerrada $\mathbb{D}^n := \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$. Una n -celda (cerrada) es cualquier espacio homeomorfo a la n -bola. Una n -celda abierta es cualquier espacio homeomorfo al interior de la n -bola. Denotaremos la esfera euclídea $\{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ por \mathbb{S}^n , y una n -esfera es cualquier espacio homeomorfo a \mathbb{S}^n .

Si N es una n -variedad topológica, un *collar* de ∂N en N es un encaje topológico $h : \partial N \times [0, 1] \longrightarrow N$ tal que $h(p, 0) = p$ para todo $p \in \partial N$ (y diremos que $h|_{\partial N \times [0, 1]}$ es un *collar abierto* de ∂N en N). Este tipo de collares siempre existe, y una demostración de este hecho puede encontrarse en [34, Proposition 3.42.]. Si $N \subseteq X$, donde $\text{int}(X)$ es otra n -variedad, un *collar exterior* de ∂N en X es un encaje $h : \partial N \times [0, 1] \longrightarrow X - \text{int}(N)$ tal que $h(p, 0) = p$ para todo $p \in \partial N$ (y diremos que $h|_{\partial N \times [0, 1]}$ es un *collar exterior abierto* de ∂N en X). Los collares exteriores de una variedad en otra *no siempre existen* (por ejemplo, la bola de Alexander no tiene un collar exterior en \mathbb{R}^3).

ANR's. Un ANR X es un espacio métrico localmente compacto tal que, si $e : X \longrightarrow B$ es un encaje topológico de X como subespacio cerrado de otro espacio metrizable B , existe un entorno U de $e(X)$ en B tal que $e(X)$ es un retracto de U . Dos referencias básicas, pero sustancialmente completas, para la teoría de ANR's son [9] y [37]. De ellas entresacamos los siguientes hechos, que utilizaremos frecuentemente sin mención especial: un retracto de un ANR es un ANR ([9, (3.2) Corollary., p. 87]), un abierto en un ANR es un ANR ([37, Proposition 7.9.]), un ANR lo es si, y sólo si, es un ANR local ([37, Theorem 8.1., p. 98]), toda variedad topológica es un ANR ([37, Corollary 8.3., p. 98]), un producto de ANR's es de nuevo un ANR.

Variedades homológicas. Una n -variedad homológica X es un ANR (localmente compacto y metrizable), finito dimensional (con cualquier teoría razonable de dimensión, por ejemplo la dimensión cohomológica) y tal que $H_k(X, X - p) = 0$ si $k \neq n$ y $H_n(X, X - p) = \mathbb{Z}$. Esta definición es más restrictiva que las manejadas en la mayoría de las referencias clásicas sobre variedades homológicas pero resulta suficiente para nuestros propósitos y además tiene la ventaja de evitar distinguir la teoría de homología utilizada, puesto que todas coinciden sobre un ANR. Conviene observar también que la condición de orientabilidad local, que aparece en todas las referencias anteriores a 1969, puede suprimirse a raíz del importante trabajo de Bredon [13] (consúltese [62] para abundar en esta cuestión).

Evidentemente cualquier n -variedad topológica sin borde es n -variedad homológica, y además para $n \leq 2$ el recíproco también es cierto ([85, Chapter IX.]). Otro resultado que utilizaremos con frecuencia es que si $X_1 \times X_2$ es una n -variedad homológica entonces X_1 y X_2 son variedades homológicas de dimensiones r y s , respectivamente, con $r + s = n$ (utilícese [61, Theorem 6., p. 17] y el hecho de que X_1 y X_2 son ANR's por ser retracts de $X_1 \times X_2$, que lo es por hipótesis). En nuestro caso generalmente será $X_1 = \mathbb{R}$, y entonces también se sigue el mismo resultado de [86] y [87].

Topología algebraica y teoría de la forma. En la tesis se necesitarán algunas nociones básicas sobre teoría de la forma, y se puede encontrar abundante información al respecto en [10], [12], [23] o [45]. Asimismo, ciertos conocimientos generales sobre poliedros compactos y ANR's compactos también serán convenientes, para lo cual pueden consultarse los libros [9] y [37] que ya se mencionaron más arriba.

Nuestra referencia principal para cuestiones de topología algebraica será el libro de Spanier [78], pero también son útiles [34], [55] y [82]. En lo que se refiere a la notación, \check{H}^* denota la cohomología de Čech, mientras que H_* y H^* denotan homología y cohomología singulares, respectivamente (todas teorías no reducidas y con coeficientes en algún anillo o módulo R , que se incluirá en la notación si es necesario). Conviene recordar aquí que dos teorías cualesquiera de homología o cohomología que satisfagan los axiomas de Eilenberg-Steenrod coinciden sobre los ANR's, porque coinciden en los poliedros (véase [78]) y todo ANR tiene el tipo de homotopía de un poliedro (véase [45]).

Si (X, A) verifica que $\check{H}^k(X, A; R)$ es finitamente generado para cada $k \in \mathbb{N}$ y es no trivial sólo para una cantidad finita de valores de k (independientemente del anillo o módulo de coeficientes R), diremos que (X, A) es *de tipo finito* (así sucede, por ejemplo, si (X, A) es un par de poliedros compactos o, más generalmente, tiene el shape de un par de poliedros compactos). En tal caso se puede definir su *polinomio de Poincaré*

$p(X, A; R) = \sum_{k \geq 0} p^k(X, A; R)t^k$, cuyo coeficiente k -ésimo es

$$p^k(X, A; R) = \text{rk } \check{H}^k(X, A; R),$$

el rango del R -módulo $\check{H}^k(X, A; R)$; y su *característica de Euler*

$$\chi(X, A) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rk } \check{H}^k(X, A; \mathbb{Z})$$

(véase [78, pp. 172 y 173]). Por definición, $\chi(X, A)$ se obtiene evaluando $p(X, A; \mathbb{Z})$ en $t = -1$, y del teorema del coeficiente universal se sigue que $\chi(X, A)$ también puede obtenerse evaluando $p(X, A; \mathbb{Z}_2)$ en $t = -1$. Haremos uso del hecho, que se puede encontrar en [78, Exercise B.1., p. 205], de que $\chi(X, A) + \chi(A) = \chi(X)$ (para que la igualdad tenga sentido es necesario que dos cualesquiera de las características que en ella intervienen estén definidas, y entonces la tercera también está definida).

Requisitos sobre dinámica

Nociones dinámicas básicas. La referencia básica sobre la teoría elemental de sistemas dinámicos continuos será [7], que puede complementarse con [56]. Por lo general nos ceñiremos a la notación y definiciones del primero, aunque resultará conveniente introducir aquí la siguiente: si $A \subseteq M$ y $p \in A$, se define el *conjunto prolongacional positivo de p relativo a A* como

$$J^+(p, A) := \bigcap_{U \in \mathcal{E}_A(p), t \geq 0} \overline{U \cdot [t, +\infty)}.$$

Claramente $p \in A \subseteq B$ implica que $J^+(p, A) \subseteq J^+(p, B)$, y si A es abierto en B , o más generalmente un entorno de p en B , se tiene la igualdad $J^+(p, A) = J^+(p, B)$. En caso de que $A = \{p\}$ se tiene trivialmente que

$$J^+(p, \{p\}) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{p \cdot [t, +\infty)},$$

y este conjunto no es otro que el ω -límite de p , que denotaremos por $\omega(p)$. Puede comprobarse que $\omega(p) = \Lambda^+(p)$ y $J^+(p) = J^+(p, M)$ en la notación del libro [7]. Allí se presentan las definiciones en términos de sucesiones,

$$\omega(p) = \{q \in M : q = \lim p \cdot t_k \text{ para alguna sucesión } t_k \longrightarrow +\infty\}$$

y

$$J^+(p) = \{q \in M : q = \lim p_k \cdot t_k \text{ para algunas sucesiones } p_k \longrightarrow p \text{ y } t_k \longrightarrow +\infty\},$$

que utilizaremos en ocasiones si es conveniente.

Todas las definiciones de arriba pueden dualizarse y dan lugar al *conjunto prolongacional negativo de p relativo a A* , que denotamos por $J^-(p, A)$. Tiene las mismas propiedades que $J^+(p, A)$. Una demostración sencilla muestra que $q \in J^-(p) \Leftrightarrow p \in J^+(q)$. La noción dual de ω -límite es la de α -límite.

Los conjuntos $J^+(p, A)$ siempre son cerrados e invariantes, y tienen la siguiente importante propiedad: si $J^+(p, A)$ posee un entorno compacto Q , entonces existen

(puede verse una prueba en [73, Proposition 4., p. 877]) $U \in \mathcal{E}_A(p)$ y $t \geq 0$ tales que $U \cdot [t, +\infty) \subseteq Q$. De aquí se sigue que $J^+(p, A)$ es conexo siempre que posea un entorno compacto (en particular, si el espacio de fases es compacto). Estas propiedades son válidas en cualquier espacio de fases Hausdorff (no necesariamente localmente compacto o metrizable).

Si $q = p \cdot t$ para algún $t \geq 0$ y $q \notin p \cdot [0, t)$, denotaremos por $[p, q]$ al conjunto $p \cdot [0, t]$, y lo llamaremos *segmento* (orientado) *determinado por p y q* . Nótese que está unívocamente determinado, incluso aunque p y q pertenezcan a una órbita periódica. Una *equivalencia de flujos* $f : N_1 \longrightarrow N_2$ es un homeomorfismo que lleva segmentos orientados de trayectoria en segmentos orientados de trayectoria; es decir, si $[p, q] \subseteq N_1$ es un segmento orientado entonces $f([p, q])$ es el segmento orientado $[f(p), f(q)]$ en N_2 . En ocasiones también nos referiremos, fijados un conjunto N y un punto $p \in N$, al *segmento de p en N* , que es el segmento orientado maximal contenido en N y que contiene a p .

Una *sección conjuntista* de un conjunto invariante $A \subseteq M$ es un subconjunto $\Sigma \subseteq A$ tal que la órbita de cualquier $p \in A$ corta a Σ exactamente en un punto $p \cdot \Sigma$; es decir, $p \cdot \mathbb{R} \cap \Sigma = \{p \cdot \Sigma\}$. Diremos que Σ es una *sección topológica* (o una sección sin más calificativo) si, además, $\varphi|_{\Sigma \times \mathbb{R}} : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow A$ es un homeomorfismo. En tal caso A se llama *paralelizable*, y esta noción puede caracterizarse (véanse [7, 1.8 Theorem., p. 47] y [7, 2.6 Theorem., p. 49]) en términos de los conjuntos prolongacionales J^+ .

Compactos invariantes aislados e índice de Conley. Dado un subconjunto ccompacto $N \subseteq M$, se define el *invariante maximal* de N como

$$\text{inv}(N) := \{p \in N : p \cdot \mathbb{R} \subseteq N\}.$$

También conviene introducir los *conjuntos asintóticos* de N ,

$$N^+ := \{p \in N : p \cdot [0, +\infty) \subseteq N\} \text{ y } N^- := \{p \in N : p \cdot (-\infty, 0] \subseteq N\}.$$

Es fácil probar que N^+ y N^- son cerrados en N (por lo tanto, compactos si no vacíos) y positiva y negativamente invariantes respectivamente. Además $\text{inv}(N) = N^+ \cap N^-$. Finalmente, denotaremos $n^+ := N^+ \cap \partial N$ y $n^- := N^- \cap \partial N$.

Siguiendo a Conley [19], diremos que un compacto invariante $K \subseteq M$ es *aislado* si posee un *entorno aislante* N , es decir, un entorno compacto N tal que $K = \text{inv}(N)$. Entre los entornos aislantes, destacamos los *entornos aislantes propios* (véase la Definición A.4), los *bloques aislantes* (véase la Definición A.10) y los *cilindros* (véase la Definición 1.9). El Apéndice A contiene una revisión de las dos primeras nociones, y allí se introduce también la notación que utilizaremos en adelante. Los cilindros se tratan en detalle en el capítulo sobre bloques aislantes regulares.

Si K es un compacto invariante aislado, se define su *índice de Conley* $h(K)$ como el tipo de homotopía del espacio cociente punteado $(N/N^s, [N^s])$, donde N es cualquier bloque aislante (o, más generalmente, cualquier entorno aislante propio) para K . Se puede probar, con cierto esfuerzo, que $h(K)$ es independiente del entorno N elegido (véase la bibliografía que sigue a este párrafo). Además del índice $h(K)$, frecuentemente utilizaremos el *índice shape* de K , que denotamos por $s(K)$ y no es sino el *shape* del espacio punteado $h(K) = (N/N^s, [N^s])$ y, para efectuar cálculos explícitos, utilizaremos también el *índice cohomológico* $CH^*(K) := \check{H}^*(N/N^s, [N^s])$ y el *índice homológico*

$CH_*(K) := H_*(N/N^s, [N^s])$. Finalmente, la *característica de Conley–Euler* de K , que denotaremos $\chi h(K)$, es la característica de Euler del par $(N/N^s, [N^s])$, siempre que esté definida. Debido a la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech, no es difícil ver que $\chi h(K) = \chi(N) - \chi(N^s)$.

Por contener las ideas que dieron nacimiento a la misma, [19] sigue siendo la referencia obligada para la teoría de Morse–Conley, aunque [66] es una excelente exposición muy concentrada que aporta nuevas demostraciones de los hechos básicos. También puede consultarse [69] para encontrar un breve resumen de los principios elementales de esta bella teoría.

Atractores. Si K es un compacto invariante aislado, definimos su *variedad inestable* como el conjunto $W^u(K) := \{p \in M : \emptyset \neq \alpha(p) \subseteq K\}$ (esto coincide con la definición dada en [67, p. 389]). Dualmente, su *variedad estable* es el conjunto $W^s(K) := \{p \in M : \emptyset \neq \omega(p) \subseteq K\}$. Ambos son conjuntos invariantes que contienen a K (y, a pesar de su nombre, no tienen por qué ser variedades). En caso de que $W^s(K)$ sea un entorno de K , se dirá que K es un *atractor* (aislado) y su *región de atracción* $\mathcal{A}(K)$ es la variedad estable (obsérvese que esta última siempre está definida, pero sólo se habla de la región de atracción si K es un atractor). $\mathcal{A}(K)$ es un entorno abierto de K en M (ver por ejemplo [7, 1.8 Theorem., p. 60]). La noción dual de la de atractor es la de un *repulsor* K con región de repulsión $\mathcal{R}(K)$.

Un atractor K es *estable* o *uniforme* si posee una base de entornos formada por conjuntos positivamente invariantes o, equivalentemente, si $J^+(p) \subseteq K$ para todo $p \in \mathcal{A}(K)$. No es difícil mostrar que, si K es aislado, entonces es estable si, y sólo si, $W^u(K) = K$. Dualmente, un repulsor es *uniforme* si posee una base de entornos formada por conjuntos negativamente invariantes o, equivalentemente, si $J^-(p) \subseteq K$ para todo $p \in \mathcal{R}(K)$. Quizás convenga señalar aquí que la terminología “atractor estable” parece preferirse a la de “atractor uniforme” (y en particular aquí la preferiremos también), pero esto tiene la consecuencia un tanto desafortunada de que la noción dual a la de “atractor estable” no es la de “repulsor inestable”, pues inestable sólo significa no estable. De ahí la asimetría en la nomenclatura “atractor estable” y “repulsor uniforme”.

Una herramienta que resultará útil está contenida en [7, Theorem 1.25., p. 64], donde se prueba que todo atractor K (independientemente de su estabilidad) determina unívocamente otro atractor estable \hat{K} que lo contiene, tal que $\mathcal{A}(K) = \mathcal{A}(\hat{K})$ y que es el más pequeño posible con esta propiedad. Más explícitamente, $\hat{K} = \bigcup_{p \in K} J^+(p)$, y con esta descripción y de [73, Proposition 5., p. 877] y el trabajo [51] sobre aplicaciones multivaluadas se sigue inmediatamente que \hat{K} es conexo si K lo es. Por supuesto, si K es estable entonces $\hat{K} = K$.

Existe aún una forma alternativa de caracterizar los atractores estables, a través de *funciones de Lyapunov*, que son funciones $\Phi : \mathcal{A}(K) \rightarrow [0, +\infty)$ tales que (i.) $\Phi|_K \equiv 0$, (ii.) Φ es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias en $\mathcal{A}(K) - K$ (más explícitamente, $\Phi(p \cdot t) < \Phi(p)$ para todo $p \in \mathcal{A}(K) - K$ y $t > 0$); finalmente (iii.) Φ es uniformemente no acotada (esto significa que para todo $R \geq 0$ existe un compacto $P_R \subseteq \mathcal{A}(K)$ tal que $\Phi(p) \geq R \forall p \notin P_R$). A veces será útil una sencilla consecuencia de (iii.), que es (iv.) los conjuntos $\{p \in \mathcal{A}(K) : \Phi(p) \leq r\}$ son compactos para todo $r \geq 0$. Con esta noción, K es un atractor estable si, y sólo si, existe una función de Lyapunov para K (puede verse en [7, Theorem 2.13., p. 73]).

Desde el punto de vista de la teoría de la forma, la inclusión de un atractor estable K en cualquier entorno suyo compacto y positivamente invariante es siempre una equivalencia *shape*, y de ello se deduce que $K \subseteq \mathcal{A}(K)$ también lo es (pero nótese que en esta última afirmación están involucrados espacios que generalmente no son compactos). Este resultado, que aparece de una manera u otra en [8], [27], [29], [32], [41], [74] o [76]) se deduce del siguiente lema, cuya demostración incluimos por ser el ejemplo paradigmático de las técnicas que habrán de utilizarse más adelante:

Lema 0.1. *Si K es un compacto invariante aislado para un flujo continuo φ , cualquier que sea el entorno aislante N de K existen sucesiones aproximativas (approximative maps en la terminología de Borsuk [12]) $(r_k^+)_{k \in \mathbb{N}} : N^+ \rightarrow K$ y $(r_k^-)_{k \in \mathbb{N}} : N^- \rightarrow K$ tales que $r_k^+|_K = r_k^-|_K = \text{id}_K$.*

Demostración. Construiremos sólo $(r_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$, porque el argumento para $(r_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ es análogo.

Aserto. Si U es un entorno de K en N^+ , existen $M_U \geq 0$ tal que $N^+ \cdot [M_U, +\infty) \subseteq U$ y V entorno positivamente invariante de K en N^+ tal que $V \subseteq U$.

Prueba. Para cada $p \in N^+$ es $J^+(p, N^+)$ un compacto contenido en N^+ por definición, porque N^+ es positivamente invariante, y existen V_p entorno de p en N^+ y $t_p \geq 0$ tales que $V_p \cdot [t_p, +\infty) \subseteq U$. Por la compacidad de N^+ existen $p_1, \dots, p_n \in N^+$ tales que $N^+ = \bigcup_{j=1}^n V_{p_j}$, y eligiendo $M_U := \max_{1 \leq j \leq n} t_{p_j}$ es $N^+ \cdot [t, +\infty) \subseteq U$. Obsérvese además que $U \cdot M_U$ es un entorno de $K \cdot M_U = K$ en $N^+ \cdot M_U \subseteq N^+$, y por tanto en N^+ . En consecuencia $V := U \cdot [M_U, +\infty) \subseteq U$ es un entorno de K en N^+ positivamente invariante y contenido en U .

Podemos ahora probar el lema. Sea $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base decreciente de entornos abiertos positivamente invariantes de K en N^+ , y $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de reales no negativos tales que $N^+ \cdot [M_k, +\infty) \subseteq U_k$ (que existen es consecuencia del Aserto anterior). Asimismo, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $\theta_k : N^+ \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $\theta_k(N^+ - U_k) \subseteq \{1\}$ y $\theta_k(K) \subseteq \{0\}$. Sea $H_{k,k+1} : N^+ \times [0, 1] \rightarrow N^+$ dada por

$$H_{k,k+1}(p, t) := p \cdot ((1-t)M_k\theta_k(p) + tM_{k+1}\theta_{k+1}(p)),$$

y pongamos $r_k^+(p) := H_{k,k+1}(p, 0)$. Es claro que cada $H_{k,k+1}$ es continua, y afirmamos que $\text{im}(H_{k,k+1}) \subseteq U_k$. En efecto, si $p \notin U_k$ (y en particular $p \notin U_{k+1}$) entonces $\theta_k(p) = \theta_{k+1}(p) = 1$ y $(1-t)M_k\theta_k(p) + tM_{k+1}\theta_{k+1}(p) = (1-t)M_k + tM_{k+1} \geq M_k$ porque $M_{k+1} \geq M_k$ por construcción. En consecuencia $H_{k,k+1}(p, t) \in U_k$. Por otro lado, si $p \in U_k$ entonces como $tM_k\theta_k(p) + (1-t)M_{k+1}\theta_{k+1}(p) \geq 0$ y U_k es positivamente invariante, también $H_{k,k+1}(p, t) \in U_k$. Además $H_{k,k+1}(p, t) = p$ para todo $t \in [0, 1]$ siempre que $p \in K$. Esto prueba que $(r_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión aproximativa que cumple $r_k^+|_K = \text{id}_K$ para cada $k \in \mathbb{N}$. \square

Si se elige N un entorno positivamente invariante de un atractor estable K , entonces $N^+ = N$ y el Lema 0.1 implica que la sucesión aproximativa $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathcal{A}(K) \rightarrow K$ que en él se construye es una inversa *shape* para la inclusión $i : K \subseteq N$, porque $r_k \circ i = r_k|_K = \text{id}$.

Capítulo 1

Bloques aislantes regulares

Introducción. Este capítulo, que es esencialmente de carácter preparatorio, estará dedicado a desarrollar la noción de *bloque aislante regular* en el contexto de los flujos continuos en variedades de dimensión no mayor que 3. Probaremos un *teorema de existencia* y un *teorema de unicidad* de bloques aislantes regulares, y extraeremos algunas consecuencias interesantes de los mismos. Por lo demás, en los capítulos siguientes ilustraremos cómo se pueden aplicar los resultados que aquí se desarrollan para explorar la dinámica en torno a compactos invariantes con *shape* trivial, así como algunas de sus propiedades topológicas.

Definición 1.1. Sea K un compacto invariante aislado en una 3-variedad sin borde M . Un bloque aislante N para K se dice que es *regular* si:

1. N es una 3-variedad compacta con borde ∂N ,
2. tanto N^e como N^s son 2-variedades compactas con borde $N^e \cap N^s$,
3. la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia *shape*.

La nomenclatura “regular” está inspirada en la teoría de entornos regulares de la topología lineal a pedazos. Esta relación, de naturaleza esencialmente heurística, queda reforzada por la validez en nuestro contexto de los Teoremas 1.2 y 1.3, que se refieren a la existencia y unicidad de bloques aislantes regulares. Los enunciamos a continuación, y su demostración (así como algunas aplicaciones de los mismos) ocupará el resto de este capítulo.

Teorema 1.2. Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M . Entonces K posee una base de bloques aislantes regulares si, y sólo si, $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0, 1$.

Teorema 1.3. Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M , y supongamos que N_1 y N_2 son bloques aislantes regulares de K . Entonces existe una equivalencia de flujos $h : N_1 \longrightarrow N_2$.

Para aligerar el lenguaje, en lo sucesivo M será una 3-variedad sin borde y K denotará un compacto invariante aislado para algún flujo continuo φ en M (pero *no* supondremos que $\check{H}^0(K; \mathbb{Z}_2)$ y $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ son finitamente generados). Los resultados aquí establecidos son también válidos para espacios de fases M de dimensiones 1 y 2, pero naturalmente presentan su máximo interés si $\dim(M) = 3$. Asimismo, puede eliminarse la hipótesis de que M no tenga borde, y en el apartado final daremos indicaciones de cómo hacerlo.

1.1. Existencia de bloques aislantes regulares

Nuestro objetivo es demostrar el Teorema 1.2, que caracteriza cuándo K posee una base de bloques aislantes regulares en M . Una de las implicaciones es muy simple:

Demostración. (de la implicación (\Rightarrow) del Teorema 1.2). Si N es un bloque aislante regular de K entonces la inclusión $i : K \longrightarrow N$ es una equivalencia *shape*, de modo que induce isomorfismos

$$i^* : \check{H}^k(N; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$$

y, como $\check{H}^k(N; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para todo $k \in \mathbb{N}$ porque N es una variedad compacta, se sigue que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ también lo es. \square

Bastante más trabajoso es demostrar que la condición de que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ sea finitamente generado para $k = 0, 1$ es suficiente para la existencia de una base de bloques aislantes regulares de K , y a ello dedicamos el resto de esta sección.

Comenzamos con la siguiente

Definición 1.4. Sean N un bloque aislante y P un entorno compacto de n^+ en $\text{int}(N^e)$. Definimos el *cilindro de P en N* como el conjunto

$$[P, P'] := \{p \in N - N^- : \pi^e(p) \in P\} \bigcup N^-.$$

Diremos que P y P' son, respectivamente, las *caras de entrada y salida* de $[P, P']$. Al conjunto

$$[\partial P, \partial P'] = \{p \in N : \pi^e(p) \in \partial_{N^e} P\}$$

lo llamaremos *cara lateral* de $[P, P']$.

Naturalmente que $[P, P']$ admite la descripción, completamente equivalente,

$$[P, P'] := \{p \in N - N^+ : \pi^s(p) \in P'\} \bigcup N^+.$$

Para aclaraciones sobre la notación puede ser útil consultar el Apéndice A.

La Proposición 1.5 recoge las propiedades básicas de los objetos que acabamos de definir y demuestra que, efectivamente, son cilindros en el sentido de la Definición 1.9.

Proposición 1.5. Sean N un bloque aislante de K y $[P, P']$ un cilindro en N .

1. $[P, P']$ es entorno de $N^+ \bigcup N^-$ en N y entorno aislante propio de K en M .
2. La frontera de $[P, P']$ en M es $P \bigcup P' \bigcup [\partial P, \partial P']$.
3. $[P, P']^e = P$ y $[P, P']^s = P'$.

En particular, $[P, P']$ es un cilindro en el sentido de la Definición 1.9.

Demostración. (1) Pongamos

$$A := \{p \in N - N^- : \pi^e(p) \notin \text{int}(P)\},$$

donde $\text{int}(P)$ denota el interior de P en N^e . Afirmamos que A es cerrado en N . Para verlo, sea $(p_k) \subseteq A$ una sucesión que converge a $p \in N$ y denotemos $q_k := \pi^e(p_k)$, que

podemos suponer que converge a $q \in N^e - \text{int}(P)$. Ahora, como $|t^e(p_k)| \leq t^s(q_k) \rightarrow t^s(q) < +\infty$ porque $q \notin P$ y P es entorno de n^+ , se concluye que la sucesión $t^e(p_k)$ es acotada y por ello su límite $t^e(p) > -\infty$. En particular $p \notin N^-$, y así $\pi^e(p_k) \rightarrow \pi^e(p) \notin \text{int}(P)$. Por tanto $p \in A$ y A es cerrado en N .

Es claro que $A \cap N^+ = \emptyset$, porque cualquier $p \in N^+$ o bien está también en N^- (y en consecuencia no en A) o bien no lo está y entonces $\pi^e(p) \in n^+ \subseteq P$. Además $A \cap N^- = \emptyset$ por definición, luego $N^+ \cup N^- \subseteq N - A \subseteq [P, P']$, donde el último contenido se comprueba inmediatamente porque

$$N - [P, P'] = \{p \in N - N^- : \pi^e(p) \notin P\}.$$

Como $N - A$ es abierto en N , se deduce que $[P, P']$ es entorno de $N^+ \cup N^-$ en N . En particular, también es entorno de $K = N^+ \cap N^-$ en N , y por tanto en M . $N - [P, P']$ es la preimagen por la aplicación continua π^e del abierto $N^e - P \subseteq N^e$, y en consecuencia es abierto, lo que implica que $[P, P']$ es cerrado en N y por ello compacto. Que es entorno aislante es una consecuencia inmediata de que $[P, P'] \subseteq N$ implica $\text{inv}([P, P']) \subseteq \text{inv}(N) = K$, y que es entorno aislante propio se sigue de la parte (3) de esta misma proposición, en que se prueba que $[P, P']^e$ y $[P, P']^s$ son respectivamente P y P' , que son cerrados en $[P, P']$.

(2) Veamos primero que $P \subseteq \partial[P, P']$, la frontera de $[P, P']$ en M . Sean $p \in P$ y U un entorno abierto de p en M . Como $P \subseteq N^e$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N$, y por la continuidad del flujo puede elegirse ε suficientemente pequeño como para que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq U$. Entonces $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq U \cap (M - N) \subseteq U \cap (M - [P, P'])$, y por tanto $p \in \partial[P, P']$. Análogo argumento demuestra que $P' \subseteq \partial[P, P']$.

Queda comprobar que $[\partial P, \partial P'] \subseteq \partial[P, P']$. Dado $p \in [\partial P, \partial P']$, es $\pi^e(p) \in \partial P$ y en particular $p \notin N^-$, luego posee un entorno abierto $U \subseteq N - N^-$. Entonces $\pi^e(U)$ es un entorno abierto de $\pi^e(p) \in \partial P$, que por tanto debe cortar a $N^e - P$. Es decir, existe $q \in U$ tal que $\pi^e(q) \notin P$, y así $q \notin [P, P']$. Esto prueba que $p \in \partial[P, P']$.

Probemos ahora el contenido $\partial[P, P'] \subseteq P \cup P' \cup [\partial P, \partial P']$. Sea $p \in \partial[P, P']$. Como $[P, P']$ es un entorno de K en M , necesariamente $p \notin K$ y así $p \notin N^-$ ó $p \notin N^+$; asumiremos lo primero (el otro caso se argumenta de modo análogo). Como $[P, P']$ es compacto, $\partial[P, P'] \subseteq [P, P']$ y por tanto $\pi^e(p) \in P$. Si es $t^e(p) = 0$ o $t^s(p) = 0$ entonces $p \in P$ o $p \in P'$, y nada hay que probar. Supongamos pues que $t^e(p) < 0$ y $t^s(p) > 0$, de modo que $p \in \text{int}(N)$. Ahora, si fuese $\pi^e(p) \in \text{int}(P)$, por la continuidad de π^e existiría un entorno U de p en $\text{int}(N)$ tal que $\pi^e(U) \subseteq \text{int}(P)$, lo que implica $U \subseteq [P, P']$ y en consecuencia $p \in \text{int}[P, P']$, el interior de $[P, P']$ en M , contradicción. Por tanto $p \in [\partial P, \partial P']$.

(3) Sea $p \in [P, P']$, y tomemos $t \geq 0$ tal que $p \cdot [0, t] \subseteq N$. Si $p \notin N^-$ debe ser $\pi^e(p) \in P$ y, como $\pi^e(p) = \pi^e(p \cdot s)$ para todo $0 \leq s \leq t$, se sigue que $p \cdot [0, t] \subseteq [P, P']$. Si $p \in N^-$ también $p \cdot s \in N^- \subseteq [P, P']$ para todo $0 \leq s \leq t$, como se ve fácilmente. Se concluye así que $p \cdot [0, t] \subseteq [P, P'] \Leftrightarrow p \cdot [0, t] \subseteq N$ para cualquier $p \in [P, P']$, de modo que $t_N^s|_{[P, P']} = t_{[P, P']}^s$ y análogamente $t_N^e|_{[P, P']} = t_{[P, P']}^e$. En particular $[P, P']^e = \{p \in [P, P'] : t_{[P, P']}^e(p) = 0\} = [P, P'] \cap \{p \in N : t_N^e(p) = 0\} = [P, P'] \cap N^e = P$ y del mismo modo $[P, P']^s = P'$. \square

Quizás no esté de más hacer notar aquí que pese al empleo de la terminología “cilindro”, en general $[P, P']$ no es homeomorfo al producto $P' \times [0, 1]$, identificando

$P' \times \{0\}$ con P' y $P' \times \{1\}$ con P . De hecho, si $K := \text{inv}(N)$, el índice de Conley de K (que se puede calcular como $[P, P']/P'$ puesto que en virtud de la Proposición 1.5 el par $([P, P'], P')$ es un par índice para K) mide cuánto se aleja $[P, P']$ de ser el “cobordismo” trivial (producto) entre P y P' .

La razón para presentar la Definición 1.4 estriba en que los cilindros serán la vía a través de la cual podremos introducir entornos aislantes propios que sean variedades, un paso preliminar para demostrar el Teorema 1.2. Más en concreto, queremos demostrar la siguiente

Proposición 1.6. *En las condiciones de la Definición 1.4, puede elegirse P de manera que P y P' sean 2-variedades compactas con borde y $[P, P']$ sea 3-variedad compacta con borde.*

La prueba de la Proposición 1.6 consistirá en mostrar, en primer lugar, que puede elegirse P (y P') que sea 2-variedad compacta con borde, y en segundo lugar, que ello implica que $[P, P']$ es una 3-variedad compacta con borde. Para conseguir lo primero será suficiente demostrar que $\text{int}(N^e)$ es 2-variedad, que es el objetivo de los siguientes lemas.

Lema 1.7. *Sea N un bloque aislante. Si $p \in \text{int}(N^e)$, existen un entorno V de p en ∂N y $\varepsilon > 0$ tales que:*

1. $U := V \cdot (-\varepsilon, \varepsilon)$ es un entorno abierto de p en M ,
2. $\varphi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ es un homeomorfismo,
3. $\varphi : V \times [0, \varepsilon) \longrightarrow U \cap N$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $p \in \text{int}(N^e)$ y N es bloque aislante, es un punto de entrada transversal y por tanto existe $\delta > 0$ tal que $p \cdot [-\delta, 0] \subseteq M - N$ y $p \cdot (0, \delta] \subseteq \text{int}(N)$. En particular $p \cdot [-\delta, \delta]$ es un compacto disjunto con N^s , luego existe un entorno abierto W de p en M tal que

$$W \cdot [-\delta, \delta] \cap N^s = \emptyset, W \cdot (-\delta) \subseteq M - N \text{ y } W \cdot \delta \subseteq \text{int}(N).$$

Aserto 1. Afirmamos que para cada $q \in W$ existe un único $\tau(q) \in [-\delta, \delta]$ tal que $q \cdot \tau(q) \in \partial N$. Que existe $\tau(q)$ es claro, puesto que $q \cdot (-\delta) \in M - N$ y $q \cdot \delta \in \text{int}(N)$, luego el conjunto conexo $q \cdot [-\delta, \delta]$ ha de cortar ∂N . Por otro lado, que $\tau(q)$ es único se puede argumentar por reducción al absurdo, como sigue. Supongamos que no lo es, y sean $\tau_1 < \tau_2 \in [-\delta, \delta]$ tales que $q \cdot \tau_1, q \cdot \tau_2 \in \partial N$. Poniendo $\rho_1 := t^s(q \cdot \tau_1)$, por el Teorema A.6 y ser N bloque aislante $q \cdot (\tau_1, \tau_1 + \rho_1) = (q \cdot \tau_1) \cdot (0, \rho_1) \subseteq \text{int}(N)$, luego entre τ_1 y $\tau_1 + \rho_1$ no hay más puntos de intersección de la trayectoria de p con ∂N y por tanto $\tau_2 \geq \tau_1 + \rho_1$ puesto que se asumió $\tau_2 > \tau_1$. Así $\tau_1 \leq \tau_1 + \rho_1 \leq \tau_2$, y esto implica que $\tau_1 + \rho_1 \in [-\delta, \delta]$, porque $\tau_1, \tau_2 \in [-\delta, \delta]$. Pero entonces $q \cdot (\tau_1 + \rho_1) \in W \cdot [-\delta, \delta]$, que se eligió disjunto con N^s , y esto contradice el hecho de que $q \cdot (\tau_1 + \rho_1)$ sea el punto de salida de $q \cdot \tau_1$.

Aserto 2. La aplicación $\tau : W \longrightarrow [-\delta, \delta]$ es continua. En efecto, si $W \supseteq (q_k) \longrightarrow q \in W$, puesto que $\tau(q_k)$ está acotada por δ en valor absoluto podemos (quizás pasando a una subsucesión de q_k) suponer que $\tau(q_k) \longrightarrow \tau \in [-\delta, \delta]$. Pero entonces $q_k \cdot \tau(q_k) \longrightarrow$

$q \cdot \tau$ y, como $q_k \cdot \tau(q_k) \in \partial N$ para cada k , es $q \cdot \tau \in \partial N$. Esto prueba que $\tau(q) = \tau$ (por el Aserto 1.) y por tanto τ es continua.

Sean V un entorno abierto de p en $\text{int}(N^e)$ y $\varepsilon \in (0, \delta)$ lo suficientemente pequeños como para que $V \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq W$. Pongamos además $U := V \cdot (-\varepsilon, \varepsilon)$. Vamos a demostrar que U , V y ε satisfacen las condiciones del enunciado.

(1) U es entorno abierto de p en M .

Prueba. Es claro que U contiene a p . Para ver que es entorno abierto de p en M será suficiente demostrar que U es abierto en W , y esto se sigue inmediatamente de la continuidad de τ y la igualdad

$$U = \{q \in W : q \cdot \tau(q) \in V \text{ y } \tau(q) \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

que comprobamos seguidamente. Llamemos provisionalmente A al conjunto de la derecha de la igualdad y tomemos $q \in U$. Como $U \subseteq W$ se sabe que existe un único $\tau(q) \in [-\delta, \delta]$ tal que $q \cdot \tau(q) \in \partial N$. Ahora bien, por la definición de U se pueden encontrar $q^* \in V \subseteq \partial N$ y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq [-\delta, \delta]$ tales que $q = q^* \cdot t$, de donde necesariamente $\tau(q) = -t$ (por la unicidad probada en el Aserto 1.) y $q \cdot \tau(q) = q^*$. Esto implica que $q \in A$, como queríamos. El otro contenido es aún más sencillo: si $q \in A$, entonces $q = (q \cdot \tau(q)) \cdot (-\tau(q)) \in V \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) = U$.

(2) $\varphi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

Prueba. Sea $h : U \longrightarrow V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dada por $h(q) := (q \cdot \tau(q), -\tau(q))$, que está claramente bien definida por la expresión alternativa para U obtenida en el paso anterior. Es obviamente continua, y trivialmente inversa para φ . Por lo tanto esta última es un homeomorfismo.

(3) $\varphi : V \times [0, \varepsilon) \longrightarrow U \cap N$ es un homeomorfismo.

Prueba. Como $V \subseteq \text{int}(N^e)$, dado $q \in V$ existe $\eta > 0$ tal que $q \cdot (0, \eta) \subseteq \text{int}(N)$. Pero además q es la única intersección de $q \cdot [-\delta, \delta]$ con ∂N , y en particular $q \cdot (0, \varepsilon) \cap N = \emptyset$ de modo que $q \cdot (0, \varepsilon) \subseteq \text{int}(N)$. Esto prueba que $\text{im}(\varphi) \subseteq U \cap N$. Por otro lado, si $q \in U \cap N$, necesariamente $\tau(q) \leq 0$. En efecto, en caso contrario $q \cdot (0, \tau(q)) \subseteq \text{int}(N)$ y por tanto $q \cdot \tau(q) \notin N^e$, lo que contradice que $V \subseteq \text{int}(N^e)$. \square

Lema 1.8. *Sea N un bloque aislante en una 3-variedad sin borde M . Cada punto $p \in \text{int}(N^e)$ posee un entorno en ∂N homeomorfo a \mathbb{R}^2 y un entorno en N homeomorfo a \mathbb{H}^3 .*

Demostración. Sea $p \in \text{int}(N^e)$. Por el Lema 1.7, p posee un entorno V en ∂N tal que para algún $\varepsilon > 0$ es $\varphi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ un homeomorfismo sobre un entorno abierto U de p en M . Como U es 3-variedad, es 3-variedad homológica, luego también lo es $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ y en consecuencia V es 2-variedad homológica. Por tanto V es 2-variedad topológica, de modo que $\text{int}(N^e)$ lo es a su vez. Finalmente, $U \cap N$ es un entorno de p en N homeomorfo a $V \cdot [0, \varepsilon)$ por el mismo Lema 1.7, que es una 3-variedad con borde $V \times \{0\}$ porque ya se ha probado que V es 2-variedad. Esto completa la prueba. \square

Naturalmente que los Lemas 1.7 y 1.8 son también válidos para puntos en $\text{int}(N^s)$. La técnica del Lema 1.8 está inspirada por el artículo [16].

Falta aún el segundo paso en la prueba de la Proposición 1.6, consistente en demostrar que si P es una 2-variedad compacta con borde entonces $[P, P']$ es una 3-variedad

compacta con borde. Para poder hacer esto de manera cómoda, será conveniente efectuar una pequeña digresión acerca de los cilindros.

1.2. Cilindros

Definición 1.9. Un entorno aislante propio C es un *cilindro* si $C^e \cap C^s = \emptyset$.

La característica distintiva de los cilindros es la posibilidad de asociarles una *función altura* que permite trabajar con ellos de manera bastante cómoda. Una función altura es, en términos informales, una función de Morse para el cilindro.

Definición 1.10. Sean C un cilindro y $K := \text{inv}(C)$ su invariante maximal. Una *función altura* para C es una función continua $u : C \rightarrow [-1, 1]$ tal que:

1. $u^{-1}(1) = C^e$, $u^{-1}(-1) = C^s$ y $u^{-1}(0) = K$,
2. u es estrictamente decreciente en los segmentos de trayectoria de C que no estén contenidos en K .

Siempre existen funciones altura:

Lema 1.11. *Cualquier cilindro C posee una función altura natural.*

Demostración. Será conveniente separar C en

$$C^{\geq 0} := \{p \in C : -t^e(p) \leq t^s(p)\}$$

y

$$C^{\leq 0} := \{p \in C : -t^e(p) \geq t^s(p)\},$$

donde t^e y t^s son las funciones tiempo de entrada y tiempo de salida de C . Obsérvese que $C^+ \subseteq C^{\geq 0}$, $C^- \subseteq C^{\leq 0}$ y además tanto $C^{\geq 0}$ como $C^{\leq 0}$ son cerrados en C debido a la continuidad de las funciones t^e y t^s . Denotaremos

$$C^0 := C^{\geq 0} \cap C^{\leq 0} = \{p \in C : -t^e(p) = t^s(p)\}.$$

Definamos en $C^{\geq 0}$ la función

$$v^{\geq 0}(p) := \frac{\arctag(-t^e(p))}{\arctag\left(\frac{-t^e(p) + t^s(p)}{2}\right)}.$$

Como t^e y t^s son continuas, y también lo es $\arctag : [-\infty, +\infty] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, se sigue que el numerador y el denominador de la expresión para $v^{\geq 0}$ son continuos. Además, el denominador nunca se anula, pues

$$\arctag\left(\frac{-t^e(p) + t^s(p)}{2}\right) = 0 \Rightarrow -t^e(p) + t^s(p) = 0,$$

de donde $0 \leq -t^e(p) = -t^s(p) \leq 0$ y en consecuencia $t^e(p) = t^s(p) = 0$, lo que implica que $p \in C^e \cap C^s$ y contradice que C sea un cilindro. En definitiva, $v^{\geq 0} : C^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Obsérvese ahora que para $p \in C^{\geq 0}$ es, por definición, $-t^e(p) \leq t^s(p)$ y así $-2t^e(p) \leq t^s(p) - t^e(p)$. Por tanto $-t^e(p) \leq \frac{t^s(p) - t^e(p)}{2}$ y, como la función \arctag es monótona

creciente, se deduce que $\arctag(-t^e(p)) \leq \arctag\left(\frac{t^s(p)-t^e(p)}{2}\right)$. Así $v^{\geq 0}(p) \in [0, 1]$ para todo $p \in C^{\geq 0}$. Además

$$v^{\geq 0}(p) = 0 \Leftrightarrow t^e(p) = 0 \Leftrightarrow p \in C^e$$

y

$$v^{\geq 0}(p) = 1 \Leftrightarrow -t^e(p) = \frac{-t^e(p) + t^s(p)}{2} \Leftrightarrow -t^e(p) = t^s(p) \Leftrightarrow p \in C^0.$$

Por último, supongamos que $p \cdot [0, t] \subseteq C$ para algún $t > 0$ y que $p \notin K$. Entonces $t^e(p \cdot t) = t^e(p) - t$ y $t^s(p \cdot t) = t^s(p) - t$ también, de donde $-t^e(p \cdot t) + t^s(p \cdot t) = -t^e(p) + t^s(p)$ y

$$v^{\geq 0}(p \cdot t) = \frac{\arctag(-t^e(p) + t)}{\arctag\left(\frac{-t^e(p) + t^s(p)}{2}\right)} > \frac{\arctag(-t^e(p))}{\arctag\left(\frac{-t^e(p) + t^s(p)}{2}\right)} = v^{\geq 0}(p),$$

de nuevo por el crecimiento estricto de la función \arctag y ser $-t^e(p) + t > -t^e(p)$ porque $-t^e(p) < +\infty$ ya que $p \notin K$. Basta poner $u^{\geq 0}(p) := 1 - v^{\geq 0}(p)$ para obtener una función definida en $C^{\geq 0}$ que es estrictamente decreciente en las trayectorias de puntos no pertenecientes a K , vale 1 exactamente en C^e y se anula sobre C^0 .

De modo análogo se puede construir una función continua $u^{\leq 0} : C^{\leq 0} \rightarrow [-1, 0]$ que es estrictamente decreciente en las trayectorias de puntos no pertenecientes a K , vale -1 exactamente en C^s y se anula sobre C^0 . Puesto que $C = C^{\geq 0} \cup C^{\leq 0}$ y $C^{\geq 0} \cap C^{\leq 0} = C^0$, donde coinciden $u^{\geq 0}$ y $u^{\leq 0}$, pueden pegarse ambas para obtener una función continua $u : C \rightarrow [-1, 1]$ que tiene las propiedades señaladas en el enunciado. \square

Si u es una función altura para el cilindro C , generalizamos la notación introducida en la demostración del lema anterior poniendo

$$C^{\geq 0} := \{p \in C : u(p) \geq 0\},$$

que llamaremos *semicilindro superior* de C ,

$$C^{\leq 0} := \{p \in C : u(p) \leq 0\},$$

que llamaremos *semicilindro inferior* de C , y finalmente

$$C^0 := C^{\geq 0} \cap C^{\leq 0}.$$

Todos estos conjuntos dependen de la función altura elegida, pero no expresaremos esta dependencia en la notación puesto que resultará irrelevante en las aplicaciones.

Lema 1.12. Sean C un cilindro, $K := \text{inv}(C)$ su invariante maximal y u una función altura cualquiera para C . Entonces $C^+ \subseteq C^{\geq 0}$, $C^- \subseteq C^{\leq 0}$ y $K \subseteq C^0$. Además $C^+ \cap C^{\leq 0} = K$ y $C^- \cap C^{\geq 0} = K$.

Demostración. Que $K \subseteq C^0$ es por definición de función altura. Comprobemos ahora que $C^+ \subseteq C^{\geq 0}$ (que $C^- \subseteq C^{\leq 0}$ se puede argumentar análogamente). Dado $p \in C^+$, debe ser $\emptyset \neq \omega(p) \subseteq K$ y así existen $q \in K$ y $t_k \rightarrow +\infty$ tales que $q = \lim p \cdot t_k$. Se puede entonces suponer que $t_k \geq 0$ para todo k , y de aquí es $u(p \cdot t_k) < u(p)$, porque $p \cdot [0, t_k] \subseteq C$ es un segmento de trayectoria contenido en C , ya que $p \in C^+$. Por tanto $0 = u(q) = \lim u(p \cdot t_k) \leq u(p)$ y $p \in C^{\geq 0}$.

Sólo queda comprobar que $C^+ \cap C^{\leq 0} = K$. El contenido (\supseteq) es claro, y respecto al otro (\subseteq) lo que sí se sabe ya es que $C^+ \cap C^{\leq 0} \subseteq C^{\geq 0} \cap C^{\leq 0} = C^0$. Ahora, fijado $p \in C^+ \cap C^{\leq 0}$, como $u(p) \neq -1$, no puede ser $p \in C^s$ y por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot [0, \varepsilon] \subseteq C$. Si fuese $p \notin K$, por un lado $u(p \cdot \varepsilon) < u(p) = 0$, luego $p \cdot \varepsilon \in C^{\leq 0}$, y por otro lado $p \cdot \varepsilon \in C^+$ porque $\varepsilon > 0$. En consecuencia $p \cdot \varepsilon \in C^+ \cap C^{\leq 0} \subseteq C^0$, lo que contradice que $u(p \cdot \varepsilon) < u(p) \leq 0$. \square

Aprovechando la función u podemos introducir unas coordenadas convenientes para los puntos de un cilindro, que llamaremos *coordenadas cilíndricas*. Dado $p \in C^{\geq 0}$ tal que $p \notin K$, consideremos su proyección sobre la tapa superior $\pi^e(p)$ y su altura $u(p) \geq 0$. Puesto que la función altura es estrictamente decreciente sobre el segmento de trayectoria de $\pi^e(p)$ en C , es claro que conociendo $\pi^e(p)$ y $u(p)$ queda p completamente determinado. Expresaremos $p = \langle \pi^e(p), u(p) \rangle$. De modo análogo, cualquier $p \in C^{\leq 0}$ tal que $p \notin K$ se puede representar como $p = \langle \pi^s(p), u(p) \rangle$, y ahora será $u(p) \leq 0$. Los puntos $p \in K$ no tienen expresión en estas coordenadas, mientras que los de $C - (C^+ \cup C^-)$ tienen una expresión $p = \langle \pi^e(p), u \rangle$ y otra $p = \langle \pi^s(p), u \rangle$. En ocasiones, para enfatizar cuál de ellas se está manejando, escribiremos $\langle \cdot, \cdot \rangle^+$ para la primera y $\langle \cdot, \cdot \rangle^-$ para la segunda.

Lema 1.13. Sean C un cilindro, $K := \text{inv}(C)$ su invariante maximal y $p_k = \langle q_k, u_k \rangle$ una sucesión de puntos del semicilindro superior. Entonces:

1. $p_k \longrightarrow p = \langle q, u \rangle \Leftrightarrow q_k \longrightarrow q$ y $u_k \longrightarrow u$,
2. $p_k \longrightarrow K \Leftrightarrow q_k \longrightarrow n^+$ y $u_k \longrightarrow 0$.

Resultados análogos se tienen para sucesiones de puntos del semicilindro inferior.

Demostración. (1) (\Rightarrow) De la continuidad de u se sigue que $u_k = u(p_k) \longrightarrow u(p) = u$. En particular, como se supuso que $u_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, debe ser $u \geq 0$ y en consecuencia $p \notin C^-$ (en caso contrario $p \in C^- \cap C^+ = K$ y p no tendría expresión del tipo $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Como $q_k = \pi^e(p_k) = p_k \cdot t^e(p_k)$ por definición y $t^e(p_k) \longrightarrow t^e(p) > -\infty$ porque $p \notin C^-$, se concluye que $q_k \longrightarrow p \cdot t^e(p) = q$.

(\Leftarrow) Suponemos ahora que $q_k \longrightarrow q$ y $u_k \longrightarrow u$ pero que $p_k = \langle q_k, u_k \rangle \not\longrightarrow p$. Como C es compacto, quizás pasando a una subsucesión se puede asumir sin pérdida de generalidad que $p_k \longrightarrow p^*$. Ahora, $p^* \notin K$ (en caso contrario, por la parte 2. (\Rightarrow) de este mismo lema se tendría que $q_k \longrightarrow n^+$ y $u_k \longrightarrow 0$, de donde $q \in n^+$ y $u = 0$, lo que contradice que la expresión $\langle q, u \rangle$ esté definida) luego puede expresarse en la forma $p^* = \langle q^*, u^* \rangle$ y en virtud de la implicación (\Rightarrow) probada en el párrafo anterior, $q_k \longrightarrow q^*$ y $u_k \longrightarrow u^*$. De aquí, $q = q^*$ y $u = u^*$, de modo que $p^* = \langle q^*, u^* \rangle = \langle q, u \rangle = p$, contradicción.

(2) (\Rightarrow) Por la compacidad de K y C^e se puede suponer que $p_k \longrightarrow p$, donde $p \in K$, y $q_k \longrightarrow q$, donde $q \in C^e$. Como u es continua, $u_k = u(p_k) \longrightarrow u(p) = 0$. Además $p_k \cdot [-t^e(p_k), 0] = q_k \cdot [0, -t^e(p_k)] \subseteq C$ y como, por otro lado, $t^e(p_k) \longrightarrow t^e(p) = -\infty$, se sigue que $q \cdot [0, +\infty) \subseteq C$, o $q \in n^+$.

(\Leftarrow) Supongamos que $q_k \longrightarrow n^+$ y $u_k \longrightarrow 0$. La compacidad de C permite suponer que $p_k \longrightarrow p$. Si fuese $p \notin K$, tendría una expresión del tipo $p = \langle q, u \rangle$ y por la parte 1. (\Rightarrow) de este mismo lema $q_k \longrightarrow q$ y $u_k \longrightarrow u$, de donde $q \in n^+$ y $u = 0$. Pero entonces no está definido $\langle q, u \rangle$, contradicción. \square

1.3. Final de la prueba del Teorema 1.2

Ahora estamos en condiciones de completar la demostración de la Proposición 1.6.

Demostración. (de la Proposición 1.6) Puesto que $n^+ \subseteq \text{int}(N^e)$, que es una 2-variedad por el Lema 1.8, puede tomarse P que sea una 2-variedad compacta posiblemente con borde. Veamos que esto implica que se cumplen las restantes afirmaciones de la proposición.

En primer lugar, probemos que P' es también una 2-variedad compacta con borde. Puesto que P' es un entorno de n^- en $\text{int}(N^s)$ y este último espacio es una 2-variedad por el Lema 1.8, todo punto del interior de P' posee un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Por otro lado, $P' - n^-$ es homeomorfo, vía dualidad, a $P - n^+$, que es una 2-variedad por ser abierto en P , que lo es. En consecuencia P' es 2-variedad, porque es la unión de los dos abiertos $\text{int}(P')$ y $P' - n^-$, que lo son.

Sólo queda comprobar que $[P, P']$ es una 3-variedad compacta con borde. Puesto que M es una 3-variedad por hipótesis, es claro que cada $p \in \text{int}([P, P'])$ posee un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^3 , y así sólo es necesario estudiar los entornos de los puntos de $\partial[P, P'] = P \cup P' \cup [\partial P, \partial P']$. Denotemos $u : [P, P'] \rightarrow [-1, 1]$ la función altura para $[P, P']$ y pongamos $U := \{p \in [P, P'] : 0 < u(p) \leq 1\}$, que es un abierto en $[P, P']$ por la continuidad de la función u . Es una consecuencia inmediata de las propiedades de las coordenadas cilíndricas que la aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow P \times (0, 1] \\ p &\longrightarrow (\pi^e(p), u(p)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Como P es variedad, el producto $P \times (0, 1]$ y en consecuencia U también lo son. De modo análogo se prueba que $V := \{p \in [P, P'] : -1 \leq u(p) < 0\}$, que es abierto en $[P, P']$, es una 3-variedad.

Finalmente, sea W un entorno abierto de ∂P en P , que vamos a suponer lo suficientemente pequeño como para que $W \cap n^+ = \emptyset$, y pongamos $\widetilde{W} = (\pi^e)^{-1}(W) \cap [P, P']$. Como π^e es continua, \widetilde{W} es abierto en $[P, P']$. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} g : \widetilde{W} &\longrightarrow W \times [-1, 1] \\ p &\longrightarrow (\pi^e(p), u(p)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo (la hipótesis de que $W \cap n^+ = \emptyset$ se utiliza aquí para asegurar que g es sobreyectiva). Por tanto, y como W es una variedad (por ser abierto en la variedad P) se sigue que \widetilde{W} es también variedad.

En definitiva, $[P, P']$ es unión de los tres abiertos U, V, \widetilde{W} , cada uno de los cuales es 3-variedad, y esto demuestra que $[P, P']$ es a su vez 3-variedad. \square

La Proposición 1.6 tiene dos consecuencias importantes, la primera de las cuales enunciamos más adelante (aunque la necesitaremos ahora) como el Corolario 1.17, y la segunda constituye el siguiente

Corolario 1.14. *Si $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0, 1$, entonces también lo es $\check{H}^k(n^+; \mathbb{Z}_2)$ para $k = 0, 1$.*

Demostración. Se toman coeficientes en \mathbb{Z}_2 , aunque ello no se haga constar de manera explícita. Considérese la siguiente porción de la sucesión exacta larga en cohomología de Čech del par (N^+, n^+) , para $k = 0$ y $k = 1$:

$$\check{H}^{k+1}(N^+, n^+) \longleftarrow \check{H}^k(n^+) \longleftarrow \check{H}^k(N^+).$$

Como la inclusión $K \subseteq N^+$ es una equivalencia *shape*, se tiene $\check{H}^k(N^+) = \check{H}^k(K)$ finitamente generado por hipótesis. Además $\check{H}^{k+1}(N^+, n^+)$ es el índice cohomológico de Conley $(k+1)$ -dimensional ([76, Corollary 2.(a), p. 1437] junto con la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech) para el flujo inverso, que por el Corolario 1.17 es también finitamente generado. En consecuencia $\check{H}^k(n^+)$ es finitamente generado para $k = 0$ y $k = 1$. \square

Como paso final antes de poder demostrar el Teorema 1.2, necesitamos una caracterización de los bloques aislante regulares. Enunciaremos, por comodidad, un resultado un poco más general.

Proposición 1.15. *Si $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0, 1$ y N es un entorno aislante propio de K , son equivalentes:*

1. *la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia shape,*
2. *la inclusión $i : n^+ \subseteq N^e$ es una equivalencia shape,*
3. *la inclusión $i : n^- \subseteq N^s$ es una equivalencia shape.*

Demostración. Probaremos sólo la equivalencia $(1) \Leftrightarrow (2)$, ya que $(1) \Leftrightarrow (3)$ es completamente análoga.

$(1) \Rightarrow (2)$ La inclusión de pares $(N^+, n^+) \subseteq (N, N^e)$ da lugar, en cohomología de Čech con coeficientes en \mathbb{Z}_2 (que no se incluyen explícitamente), al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \check{H}^{k+1}(N) & \longleftarrow & \check{H}^{k+1}(N, N^e) & \longleftarrow & \check{H}^k(N^e) & \longleftarrow & \check{H}^k(N) & \longleftarrow & \check{H}^k(N, N^e) \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ \check{H}^{k+1}(N^+) & \longleftarrow & \check{H}^{k+1}(N^+, n^+) & \longleftarrow & \check{H}^k(n^+) & \longleftarrow & \check{H}^k(N^+) & \longleftarrow & \check{H}^k(N^+, n^+) \end{array}$$

Aquí $N^+ \subseteq N$ es una equivalencia *shape*, puesto que $K \subseteq N^+$ y $K \subseteq N$ también lo son (la primera por [76, Theorem 1.(b), p. 1437], la segunda por hipótesis). Así, las flechas etiquetadas con f_1 y f_4 resultan ser isomorfismos. Por otro lado, también f_2 y f_5 son isomorfismos, por [76, Theorem 1.(a), p. 1437]. En consecuencia, el lema de los cinco implica ahora que f_3 también es isomorfismo. Aplicando el Corolario B.8 se concluye que la inclusión de n^+ en N^e es una equivalencia *shape*, como queríamos.

$(2) \Rightarrow (1)$ Obsérvese que n^+ tiene el *shape* de un poliedro (Corolario 1.14 y Teorema B.2) y por tanto también lo tiene N^e por hipótesis, de modo que ambos son movibles. Sean $r : N^e \rightarrow n^+$ la inversa *shape* para la inclusión $i : n^+ \rightarrow N^e$ y $\hat{r} : N^e \rightarrow n^+$ un morfismo *strong shape* que induzca r . En virtud de [45, Theorem 3., p. 281] es \hat{r} una inversa *strong shape* para la inclusión $i : n^+ \rightarrow N^e$ y por [45, Theorem 6.(ii.), p. 282] se concluye que $N^+ \subseteq N^+ \cup N^e$ es una equivalencia *shape*. Como [76, Theorem 1.(a), p. 1437] y [76, Theorem 1.(b), p. 1437] garantizan que $N^+ \cup N^e \subseteq N$ y $K \subseteq N^+$ son también equivalencias *shape*, lo es $K \subseteq N$, como queríamos. \square

Estamos ya en condiciones de demostrar el Teorema 1.2.

Demostración. (de la implicación (\Leftarrow) del Teorema 1.2). Sea N un bloque aislante de K . Como $\text{int}(N^e)$ es una 2-variedad por el Lema 1.8, por el Corolario 1.14 y el Teorema B.2 se tiene que n^+ posee una base de entornos regulares en $\text{int}(N^e)$. Tomemos dos de ellos P_1 y P_2 con la propiedad de que $P_2 \subseteq \text{int}(P_1)$.

Puesto que $P_2 \subseteq P_1$ es una equivalencia *shape*, porque lo son $n^+ \subseteq P_1$ y $n^+ \subseteq P_2$ por construcción, por el Lema B.5 existe un homeomorfismo $(\theta, \rho) : P_1 - \text{int}(P_2) \rightarrow \partial P_2 \times [0, 1]$ tal que $\rho(p) = 0$ para todo $p \in \partial P_2$ y $\rho(p) = 1$ para todo $p \in \partial P_1$. Construiremos un bloque aislante regular N_* que esté comprendido entre $[P_2, P'_2]$ y $[P_1, P'_1]$ añadiendo a $[P_2, P'_2]$ una especie de “collar exterior convexo”, como se muestra en la Figura 1.1.

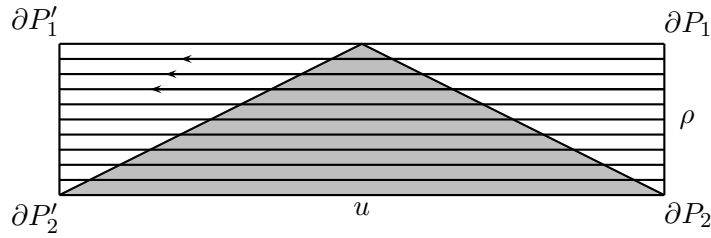


Figura 1.1: Adición de un collar convexo a $[P_2, P'_2]$

Extendamos la función ρ a todo $[P_1, P'_1]$ de forma continua haciendo $\rho|_{[P_2, P'_2]} := 0$ y $\rho(p) := \rho \circ \pi^e(p)$ para cualquier otro $p \in [P_1, P'_1] - [P_2, P'_2]$. Sea ahora

$$N_* := \{p \in [P_1, P'_1] : \rho(p) \leq 1 - |u(p)|\},$$

donde u denota la función altura natural del cilindro $[P_1, P'_1]$ (nótese por cierto que su restricción a $[P_2, P'_2]$ es la función altura natural del cilindro $[P_2, P'_2]$). Es claro que N_* es compacto, porque es cerrado en $[P_1, P'_1]$ debido a la continuidad de las funciones ρ y u , y además contiene a $[P_2, P'_2]$ puesto que $\rho|_{[P_2, P'_2]} = 0$. Por tanto es entorno aislante de K .

Calcularemos ahora simultáneamente ∂N_* , N_*^e y N_*^s . Sea $p \in \partial N_*$. Si fuese $\rho(p) < 1 - |u(p)|$ entonces $|u(p)| < 1 - \rho(p) \leq 1$, luego $p \notin P_1 \cup P'_1$, y además $\rho(p) < 1$, luego $p \notin [\partial P_1, \partial P'_1]$. Por la parte (2) de la Proposición 1.5 esto implica que $p \in \text{int}_N([P_1, P'_1])$, y si U es un entorno de p en N lo suficientemente pequeño como para que $U \subseteq [P_1, P'_1]$ y se satisfaga la desigualdad $\rho|_U < 1 - |u|_U$, se concluye que $U \subseteq N_*$, lo que contradice que $p \in \partial N_*$. Por tanto ha de ser $\rho(p) = 1 - |u(p)|$.

Sea ahora $p \in N_*$ tal que $\rho(p) = 1 - |u(p)|$. Comprobaremos que $p \in N_*^e \Leftrightarrow u(p) \geq 0$ y $p \in N_*^s \Leftrightarrow u(p) \leq 0$, de donde se seguirá en particular que

$$\partial N_* \subseteq \{p \in N_* : \rho(p) = 1 - |u(p)|\} \subseteq N_*^e \cup N_*^s \subseteq \partial N_*,$$

de modo que $\partial N_* = \{p \in N_* : \rho(p) = 1 - |u(p)|\}$ y $\partial N_* = N_*^e \cup N_*^s$.

Supongamos primero que $u(p) = 1$. Entonces $\rho(p) = 0$ y $p \in [P_2, P'_2]$, pero como $u(p) = 1$ necesariamente $p \in P_2$. Puesto que $P_1 = [P_1, P'_1]^e$ por la parte (3) de la Proposición 1.5, se tiene que para cualquier $p \in P_2 \subseteq P_1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \cap [P_1, P'_1] = \emptyset$ y en particular $p \cdot (-\varepsilon, 0) \cap N_* = \emptyset$ porque $N_* \subseteq [P_1, P'_1]$. Como

además $p \in N_*$, concluimos que $p \in N_*^e$. Esto prueba que $P_2 \subseteq N_*^e$ y análogamente (considerando el caso $u(p) = -1$) se demuestra que $P_2' \subseteq N_*^s$.

Podemos suponer entonces que $|u(p)| < 1$, y asumiremos primero que $0 < u(p) < 1$. Existe entonces $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $p \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq [P_1, P_1']$ y $0 < u(p \cdot t) < 1$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Recordando que u es estrictamente decreciente en los segmentos de trayectoria de $[P_1, P_1']$ que no están en K , mientras que ρ es constante sobre ellos por definición, se tiene que

$$\rho(p \cdot t) = \rho(p) = 1 - u(p) > 1 - u(p \cdot t) = 1 - |u(p \cdot t)| \text{ para } t \in (-\varepsilon, 0)$$

y

$$\rho(p \cdot t) = \rho(p) = 1 - u(p) < 1 - u(p \cdot t) = 1 - |u(p \cdot t)| \text{ para } t \in (0, \varepsilon),$$

de modo que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \cap N_* = \emptyset$ y $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq N_*$ (de hecho, $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq \text{int}(N_*)$, aunque esto no lo necesitaremos). Ello implica que $p \in N_*^e - N_*^s$, y de manera análoga se comprueba que si $-1 < u(p) < 0$ entonces $p \in N_*^s - N_*^e$. Finalmente, cuando $u(p) = 0$ se tiene que $p \in N_*^e \cap N_*^s$ porque si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño como para que $p \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq [P_1, P_1']$,

$$\rho(p \cdot t) = \rho(p) = 1 - |u(p)| = 1 > |u(p \cdot t)| \text{ si } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ y } t \neq 0.$$

Esto completa la prueba de que si $p \in N_*$ es tal que $\rho(p) = 1 - |u(p)|$, entonces $p \in N_*^e \Leftrightarrow u(p) \geq 0$ y $p \in N_*^s \Leftrightarrow u(p) \leq 0$.

Vamos ahora a demostrar que N_*^e y N_*^s tienen frontera común $N_*^e \cap N_*^s$ (en ∂N_*). En primer lugar, como u es una función continua, el conjunto $\{p \in \partial N_* : u(p) > 0\}$ es un abierto de ∂N_* contenido en N_*^e , de donde si $p \in \partial N_*^e$ entonces necesariamente $u(p) = 0$, y análogamente para $p \in \partial N_*^s$. Veamos el recíproco: si $p \in \partial N_*$ es tal que $u(p) = 0$, entonces $p \in \partial N_*^e \cap \partial N_*^s$. Y en efecto, en tal caso $\rho(p) = 1 - |u(p)| = 1$, luego $\rho \circ \pi^e(p) = 1$ y por tanto $\pi^e(p) \in \partial P_1$. Ahora sea $(q_n) \subseteq \text{int}(P_1) - P_2$ una sucesión que converja a $\pi^e(p)$, y consideremos $p_n := \langle q_n, 0 \rangle$, que es una sucesión contenida en N_* porque $u(p_n) = 0$ por definición y $\rho(p_n) = \rho(q_n) < 1 = 1 - |u(p_n)|$. Además el punto de entrada de p_n en N_* es $\pi_{N_*}^e(p_n) = \langle q_n, 1 - \rho(q_n) \rangle$, que cumple $u \circ \pi^e(p_n) = 1 - \rho(q_n) > 0$, luego $\pi_{N_*}^e(p_n) \notin N_*^s$. Si hacemos $n \rightarrow +\infty$ se tiene que $\pi^e(p_n) \rightarrow \langle q, 0 \rangle = p$, de modo que p es un punto de N_*^s que es límite de puntos de su complementario en N_* , y por tanto pertenece a ∂N_*^s . Análogamente se comprueba que $p \in \partial N_*^e$, todo lo cual demuestra que $\partial N_*^e = \partial N_*^s = N_*^e \cap N_*^s$.

Queremos comprobar que N_* es una 3-variedad compacta con borde y N_*^e, N_*^s son 2-variedades compactas con borde. Empezamos por esto último. Para cualquier $p \in N_*^e$ se tiene que $\pi^e(p)$ está definido (y pertenece a P_1), de modo que podemos considerar la restricción $\pi^e|_{N_*^e} : N_*^e \rightarrow P_1$. Es una biyección, pues si dado $q \in P_1$ buscamos $p \in N_*^e$ tal que $\pi^e(p) = q$ nos vemos obligados a elegir $p = \langle q, u \rangle$ con u tal que $u(p) \geq 0$ y $\rho(p) = 1 - u(p)$ para que $p \in N_*^e$. Esto implica $u(p) = 1 - \rho(p) = 1 - \rho(q)$ puesto que ρ es constante en segmentos de trayectoria por definición, y determina bien un único $p := \langle q, 1 - \rho(q) \rangle$ tal que $\pi^e(p) = q$. Así pues, $\pi^e|_{N_*^e} : N_*^e \rightarrow P_1$ es un homeomorfismo, y esto implica que N_*^e es una 2-variedad compacta con borde, porque P_1 lo es. Análogamente se comprueba que N_*^s es una 2-variedad compacta con borde, estableciendo un homeomorfismo entre ella y P_1' . Por último, la comprobación de que N_* es 3-variedad compacta con borde puede hacerse sin dificultad utilizando técnicas similares a las que acabamos de emplear, y por ello la omitimos.

Finalmente, sea $H_t : P_1 \longrightarrow P_1$ la retracción por deformación fuerte de P_1 sobre P_2 dada por $H_t(p) := (\rho, \theta)^{-1}(\rho(p), (1-t)\theta(p))$ y consideremos su extensión $\hat{H}_t : N_* \longrightarrow N_*$ definida como sigue:

$$\hat{H}_t(p) := \begin{cases} p & \text{si } \rho(p) = 0, \\ \langle H_t \circ \pi^e(p), u(p) \rangle & \text{si } \rho(p) > 0. \end{cases}$$

Obsérvese que si $(p_n) \subseteq N_*$ es tal que $p_n \longrightarrow p$ con $\rho(p_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\rho(p) = 0$, entonces $\pi^e(p) \in \partial P_2$ y $\hat{H}_{t_n}(p_n) = \langle H_{t_n} \circ \pi^e(p_n), u(p_n) \rangle \longrightarrow \langle H_t \circ \pi^e(p), u(p) \rangle = \langle \pi^e(p), u(p) \rangle$ puesto que $H_t|_{[P_2, P'_2]} = \text{id}_{[P_2, P'_2]}$ para todo $t \in [0, 1]$. Además por el mismo motivo es $\hat{H}_t|_{[P_2, P'_2]} = \text{id}_{[P_2, P'_2]}$. Es claro también que $\hat{H}_0 = \text{id}_{N_*}$ y $\text{im}(\hat{H}_1) = [P_2, P'_2]$, todo lo cual prueba que \hat{H}_t es una retracción por deformación fuerte sobre $[P_2, P'_2]$. Como la inclusión $n^+ \subseteq P_2 = [P_2, P'_2]^e$ es una equivalencia *shape* por construcción, de la Proposición 1.15 se sigue que $K \subseteq [P_2, P'_2]$, y por tanto $K \subseteq N_*$, son también equivalencias *shape*.

Hemos construido así un bloque aislante N_* que satisface todas las condiciones del enunciado del Teorema 1.2. Como además $N_* \subseteq N$, donde N era un bloque aislante arbitrario de K , y éste posee una base de tales bloques aislantes, se concluye que existe una base de bloques aislantes regulares para K . \square

1.4. Aplicaciones

La primera aplicación no es sino una sencilla observación derivada de la prueba del Teorema 1.2. Con la misma notación de allí, pero eliminando la hipótesis de que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ sea finitamente generado para $k = 0, 1$, puede elegirse un entorno P_2 de n^+ en $\text{int}(N^e)$ que sea una 2-variedad compacta con borde (aunque ahora no podrá conseguirse que sea la inclusión $n^+ \subseteq P_2$ una equivalencia *shape*) y P_1 el resultado de añadir a ∂P_2 un collar cerrado exterior en $\text{int}(N^e)$. Entonces el argumento que conduce a la construcción de N_* sigue siendo válido, si bien la inclusión $K \subseteq N_*$ ya no será una equivalencia *shape*. En definitiva, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.16. *Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M . Entonces K posee una base de bloques aislantes N que satisfacen las dos primeras condiciones de la Definición 1.1.*

Corolario 1.17. *En las condiciones de la Proposición 1.16, el índice de Conley $h(K)$ tiene el tipo de homotopía de un ANR compacto punteado. En particular, los índices homológico y cohomológico son finitamente generados.*

Demostración. Por la Proposición 1.6 existe un entorno aislante regular $[P, P']$ de K que es una 3-variedad compacta y cuyo conjunto de salida $[P, P']^s = P'$ es una 2-variedad compacta. Ambos ANR's, por tanto, y en consecuencia $[P, P']/P'$ es un ANR a su vez. \square

Corolario 1.18. *En las condiciones de la Proposición 1.16, y si $-K$ denota a K como compacto invariante aislado para el flujo inverso, entonces*

$$CH_k(K; R) = CH^{3-k}(-K; R),$$

donde $R = \mathbb{Z}$ si M es orientable en torno a K ó $R = \mathbb{Z}_2$ en caso contrario.

Demostración. Por la Proposición 1.16 existe un bloque aislante N de K que es una 3-variedad compacta y cuyos conjuntos de salida N^s y entrada N^e son 2-variedades compactas. Ahora, (N, N^s) es un par índice para K y (N, N^e) lo es para $-K$, de modo que por dualidad de Lefschetz es $CH_k(K) = H_k(N, N^s) = H^{3-k}(N, N^e) = CH^{3-k}(-K)$ con los coeficientes apropiados. \square

Corolario 1.19. *Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M . Son equivalentes:*

1. K tiene el shape de un poliedro finito.
2. $\check{H}^0(K; \mathbb{Z})$ y $\check{H}^1(K; \mathbb{Z})$ son finitamente generados.
3. $\check{H}^0(K; \mathbb{Z}_2)$ y $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ son finitamente generados.

Demostración. Que (1) \Rightarrow (2) es conocido. A su vez, la implicación (2) \Rightarrow (3) es una consecuencia inmediata del teorema del coeficiente universal para cohomología de Čech ([78, 11 Theorem, p. 336]). Finalmente, (3) \Rightarrow (1) se sigue del Teorema 1.2 y el hecho de que toda variedad compacta tiene el *shape* de un poliedro finito. \square

Un ejemplo de aplicación del Corolario 1.19 es el siguiente (compárese con [24]).

Ejemplo 1.20. Supongamos que un compacto invariante aislado K para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde es un solenoide de tipo $n = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, es decir, es el límite inverso de la sucesión

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{p_{n_1}} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{p_{n_2}} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{p_{n_3}} \dots$$

donde $p_{n_k} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ está dado por $p_{n_k}(z) = z^{n_k}$. Entonces K es homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Demostración. Comencemos calculando $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$. Para ello emplearemos la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech (que puede consultarse, por ejemplo, en [78, 6 Theorem, p. 318]), en virtud de la cual es

$$\check{H}^1(K; G) = \varinjlim \{p_{n_k}^* : \check{H}^1(\mathbb{S}^1; G) \longrightarrow \check{H}^1(\mathbb{S}^1; G)\}$$

para cualquier grupo de coeficientes G .

Es claro que si $G = \mathbb{Z}_2$, entonces $\check{H}^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ y para cada morfismo conectante p_{n_k} se tiene

$$p_{n_k}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } n_k \text{ es par,} \\ \text{id}_{\mathbb{Z}_2} & \text{si } n_k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, si existe una subsucesión de $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cuyos miembros son todos pares, $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2) = 0$. En otro caso, a partir de algún k son todos los n_k impares, cada $p_{n_k}^*$ es un isomorfismo y así $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Cualquiera que sea la situación, el grupo $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado, como también lo es $\check{H}^0(K; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ por ser el solenoide conexo (o directamente porque $p_{n_k}^* : \check{H}^0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \check{H}^0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ es la identidad $\text{id}_{\mathbb{Z}_2}$).

Por el Corolario 1.19, deberá ser $\check{H}^1(K; \mathbb{Z})$ también finitamente generado. Existe entonces algún $k_0 \geq 1$ tal que $\check{H}^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})_{k_0}$, el k_0 -ésimo grupo del sistema directo

$$\check{H}^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_{n_1}^*} \check{H}^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_{n_2}^*} \check{H}^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_{n_3}^*} \dots$$

contiene un sistema generador de $\check{H}^1(K; \mathbb{Z})$, y esto exige que los siguientes $p_{n_k}^*$, con $k \geq k_0$, sean todos suprayectivos, lo que implica que $|n_k| = 1$ puesto que ahora $p_{n_k}^*(u) = n_k u$. En consecuencia la familia cofinal $\{p_{n_k} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : k \geq k_0\}$ consta de homeomorfismos ($p_{n_k}(z) = z$ o $p_{n_k}(z) = z^{-1}$ según si $n_k = 1$ o $n_k = -1$) y se sigue que su límite inverso K es homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Esto completa la prueba. \square

1.5. Unicidad de bloques aislantes regulares

Pasamos ahora a demostrar el resultado de *unicidad de bloques aislantes regulares* (Teorema 1.3), que es complementario al Teorema de existencia 1.2.

Demostración. (del Teorema 1.3) Sustituyendo si es necesario N_2 por un bloque aislante regular de K contenido en $N_1 \cap N_2$ (que existe por el Teorema 1.2), bastará probar el teorema en el caso en que $N_1 \subseteq \text{int}(N_2)$.

Considérese la proyección $\pi_2^e : N_2 - N_2^- \rightarrow N_2^e$, y obsérvese que $n_1^+ \cap N_2^- = \emptyset$ porque $n_1^+ \cap N_2^- \subseteq N_1^+ \cap N_2^- \subseteq N_2^+ \cap N_2^- = K$ es disjunto con n_1^+ puesto que este último está contenido en ∂N_1 . Por tanto tiene sentido considerar la restricción $\pi_2^e|_{n_1^+}$, cuya imagen está en n_2^+ : si $p \in n_1^+$ entonces $[\pi_2^e(p), p] \subseteq N_2$ por definición de π_2^e y $p \cdot [0, +\infty) \subseteq N_1 \subseteq N_2$, de donde $\pi_2^e(p) \cdot [0, +\infty) \subseteq N_1$ y $\pi_2^e(p) \in n_1^+$.

Aserto 1. Afirmando que $\pi_2^e : n_1^+ \rightarrow n_2^+$ es un homeomorfismo. Como n_1^+ es compacto (y n_2^+ Hausdorff) y ya se sabe que π_2^e es continua, sólo será necesario probar que es biyectiva. Para ver que es sobre, tómese $p \in n_2^+$. Entonces $p \in N_2^+$, de donde $p \cdot [0, +\infty) \subseteq N_2$ y por tanto $\emptyset \neq \omega(p) \subseteq N_2$. Ahora, por ser N_2 entorno aislante de K necesariamente $\emptyset \neq \omega(p) \subseteq K$ y así, siendo también N_1 entorno de K , debe existir $t \geq 0$ tal que $p \cdot [t, +\infty) \subseteq N_1$; es decir, $p \cdot t \in N_1^+$. Puesto que $p \cdot t \notin K$ (en otro caso $p \in K$, y esto no es posible porque $p \in \partial N_2$ y N_2 es entorno de K), tiene sentido considerar $q := \pi_1^e(p \cdot t) \in N_1^e$. Obsérvese que de hecho $[q, p \cdot t] \subseteq N_1$ y $(p \cdot t) \cdot [0, +\infty) \subseteq N_1$, luego $q \in n_1^+$. Además, como $[p, q] \subseteq N_2$, es $p = \pi_2^e(q)$ y por tanto π_2^e es sobre.

Veamos que es inyectiva. Supóngase que $\pi_2^e(p_1) = \pi_2^e(q_1) = p_2$ para ciertos $p_1, q_1 \in n_1^+$. Entonces tanto p_1 como q_1 están en la semitrayectoria positiva de p_2 , supongamos $q_1 = p_1 \cdot t$ con $t \geq 0$. Como $t_1^s(p_1) = +\infty$ porque $p_1 \in n_1^+$, por el Teorema A.6 se sigue que debe ser $p \cdot (0, +\infty) \subseteq \text{int}(N_1)$ puesto que la primera alternativa recogida en el enunciado del mismo no se puede dar. Pero entonces, como $q_1 \in \partial N_1$, necesariamente $t = 0$ y $q_1 = p_1$.

Aserto 2. Existen entornos U_2 y U_1 de n_2^+ y n_1^+ en N_2^e y N_1^e respectivamente tales que la aplicación $\pi_2^e|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ es un homeomorfismo.

Como $N_2 - N_2^-$, el dominio de definición de π_2^e , es un abierto que contiene a n_1^+ (esto se argumentó en el Aserto 1.), se sigue que existe un entorno abierto W_1 de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$ en el que también está definida π_2^e . Veamos ahora que existe un entorno abierto $U_1 \subseteq W_1$ de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$ tal que $\pi_2^e|_{U_1}$ es inyectiva. Si no, existirían dos sucesiones $(p_k), (q_k) \subseteq N_1^e$ que convergen a sendos puntos $p, q \in n_1^+$ tales que $\pi_2^e(p_k) = \pi_2^e(q_k)$, pero $p_k \neq q_k$ para todo k . Ello significa que $p_k \cdot t_2^e(p_k) = q_k \cdot t_2^e(q_k)$, o $q_k = p_k \cdot (t_2^e(p_k) - t_2^e(q_k))$. Si ponemos $t_k := t_2^e(p_k) - t_2^e(q_k)$, como $\pi_2^e(p) = \pi_2^e(q)$ por continuidad y se sabe que π_2^e es inyectiva en n_1^+ , necesariamente $p = q$ y en particular $t_k \rightarrow 0$. Ahora, por el Lema 1.7 existen $\varepsilon > 0$ y V_1 entorno abierto de $p = q$ en $\text{int}(N_1^e)$ tales que $\varphi : V_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1$ es un homeomorfismo sobre U_1 entorno abierto de $p = q$ en M . Pero entonces, para k

suficientemente grande como para que $p_k, q_k \in V_1$ y $|t_k| < \varepsilon$, sucede que $\varphi(p_k, t_k) = q_k = \varphi(q_k, 0)$ y esto implica (por la inyectividad de φ en $V_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$) que $p_k = q_k$, contradicción. En consecuencia π_2^ε es inyectiva en algún entorno abierto U_1 de n_1^+ . Poniendo $U_2 := \pi_2^\varepsilon(U_1)$ se obtiene un entorno abierto de n_2^+ en N_2^ε (que U_2 contiene a n_2^+ es consecuencia de la igualdad $n_2^+ = \pi_2^\varepsilon(n_1^+)$ probada en el Aserto 1.), porque las proyecciones son abiertas. En definitiva, $\pi_2^\varepsilon|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ es un homeomorfismo.

Sea $P_1 \subseteq U_1$ un entorno regular de n_1^+ en $\text{int}(N_1^\varepsilon)$ (que existe se sigue del Teorema B.2 y el hecho de ser $\check{H}^k(n_1^+; \mathbb{Z}_2)$ finitamente generado puesto que la inclusión $i_1 : n_1^+ \subseteq N_1^\varepsilon$ es una equivalencia *shape*, véase la caracterización de la Proposición 1.15 al respecto). Entonces $P_2 := \pi_2^\varepsilon(P_1) \subseteq U_2$ es un entorno de n_2^+ en $\text{int}(N_2^\varepsilon)$ que también es 2-variedad compacta con borde. Además la inclusión $i_2 : n_2^+ \subseteq P_2$ induce isomorfismos en cohomología de Čech, puesto que $i_2 = \pi_2^\varepsilon \circ i_1 \circ (\pi_2^\varepsilon|_{P_1})^{-1}$. Escogeremos P_1 lo suficientemente pequeño como para que P_1' sea, a su vez, lo bastante pequeño para que $\pi_2^s|_{P_1'} : P_1' \rightarrow P_2' := \pi_2^s(P_1') = \pi_2^\varepsilon(P_1)'$ sea un homeomorfismo también (esto se puede hacer, basta dualizar las pruebas de los Asertos 1. y 2.).

Aserto 3. Existen funciones altura u_1 y u_2 para los cilindros $[P_1, P_1']$ y $[P_2, P_2']$ respectivamente tales que $2u_2|_{[P_1, P_1']} = u_1$.

Prueba. Para $p \in [P_2, P_2']^{\geq 0}$ y $p \notin [P_1, P_1'] - P_1$ definimos

$$v_2^+(p) := 1 - \frac{1}{2} \frac{t_2^\varepsilon(p)}{t_2^\varepsilon \circ (\pi_2^\varepsilon|_{P_1})^{-1} \circ \pi_2^\varepsilon(p)}.$$

El denominador no se anula nunca, porque $(\pi_2^\varepsilon|_{P_1})^{-1} \circ \pi_2^\varepsilon(p) \in P_1 \subseteq \text{int}(N_2)$, y así v_2^+ es una función continua. Si $p \in P_2$ entonces $v_2^+(p) = 1$, porque $t_2^\varepsilon(p) = 0$, y si $p \in P_1$ entonces $v_2^+(p) = \frac{1}{2}$, porque $(\pi_2^\varepsilon|_{P_1})^{-1} \circ \pi_2^\varepsilon(p) = p$.

La función v_2^+ es estrictamente decreciente en el segmento de trayectoria de cualquier $p \in P_2$ que media entre p y $q := (\pi_2^\varepsilon)^{-1}(p)$, el punto por el que p entra en $[P_1, P_1']$. En efecto, $[p, q] = \{p \cdot t : 0 \leq t \leq -t_2^\varepsilon(q)\}$ y se tiene

$$v_2^+(p \cdot t) = 1 - \frac{1}{2} \frac{t_2^\varepsilon(p \cdot t)}{t_2^\varepsilon(q)} = 1 + \frac{1}{2} \frac{t}{t_2^\varepsilon(q)},$$

que es estrictamente decreciente desde 1 hasta $\frac{1}{2}$ según t crece de 0 a $-t_2^\varepsilon(q)$. Conviene observar que v_2^+ está efectivamente definida sobre todos los puntos de $[p, q]$, porque este segmento corta a $[P_1, P_1']$ sólo en q , que pertenece a P_1' . En efecto, si $r \in [p, q]$ es el primer punto de corte de $[p, q]$ con $[P_1, P_1']$, necesariamente $r \in P_1$ (porque P_1 es el conjunto de entrada en $[P_1, P_1']$ y entonces $\pi_2^\varepsilon|_{P_1}(r) = \pi_2^\varepsilon|_{P_1}(q) = p$, lo que implica $r = q$ porque $\pi_2^\varepsilon|_{P_1}$ es inyectiva por construcción).

De modo análogo se puede construir v_2^- para los puntos de $p \in [P_2, P_2']^{\leq 0}$ con $p \notin [P_1, P_1'] - P_1'$ que decrezca desde $-\frac{1}{2}$ hasta -1 en los segmentos de trayectoria comprendidos entre P_1' y P_2' . Finalmente, eligiendo cualquier función altura u_1 para $[P_1, P_1']$, pueden pegarse las tres para obtener

$$u_2(p) := \begin{cases} v_2^+(p) & \text{si } p \in [P_2, P_2']^{\geq 0} \text{ y } p \notin [P_1, P_1'] - P_1, \\ \frac{1}{2}u_1(p) & \text{si } p \in [P_1, P_1'], \\ v_2^-(p) & \text{si } p \in [P_2, P_2']^{\leq 0} \text{ y } p \notin [P_1, P_1'] - P_1'. \end{cases}$$

Que esta función es continua se debe a que $v_2^+|_{P_1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_1|_{P_1}$ y $v_2^-|_{P_1'} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_1|_{P_1'}$. Además, puesto que es estrictamente decreciente por construcción en los segmentos de trayectoria contenidos en cada uno de los trozos en que se ha partido su

dominio de definición (y no contenidos en K), se concluye que u_2 es estrictamente decreciente en los segmentos de trayectoria de $[P_2, P'_2]$ no contenidos en K . Que cumple las restantes condiciones para ser función altura de $[P_2, P'_2]$ es inmediato, y esto prueba el aserto.

Aserto 4. Existe una equivalencia de flujos $h : [P_1, P'_1] \longrightarrow [P_2, P'_2]$.

Denotemos $\langle q_2, u_2 \rangle_2^+$ y $\langle q_1, u_1 \rangle_1^+$ las coordenadas cilíndricas en los semicilindros $[P_2, P'_2]^{\geq 0}$ y $[P_1, P'_1]^{\geq 0}$ respectivamente dadas por las funciones altura construidas en el Aserto 3. Queremos que h sea la identidad en $|u_1| \leq \frac{1}{2}$ y lleve cualquier otro segmento $[p_1, q_1]$ de $[P_1, P'_1]^{\geq 0}$ (comprendido entre las alturas $u_1(p_1) = 1$ y $u_1(q_1) = \frac{1}{2}$) homeomórficamente en el segmento $[\pi_2^e(p_1), q_1]$ (y análogamente para segmentos del semicilindro inferior). Así pues, pondremos

$$h(p) := \begin{cases} \langle \pi_2^e(p), -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p) \rangle_2^+ & \text{si } \frac{1}{2} \leq u_1(p) \leq 1, \\ p & \text{si } |u_1(p)| \leq \frac{1}{2}, \\ \langle \pi_2^s(p), \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p) \rangle_2^- & \text{si } -1 \leq u_1(p) \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si $u_1(p)$ varía entre $\frac{1}{2}$ y 1, la expresión $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p)$ varía entre $\frac{1}{4}$ y 1. Análogamente, si $u_1(p)$ varía entre $-\frac{1}{2}$ y -1 , la expresión $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p)$ varía entre $-\frac{1}{4}$ y -1 . Esto prueba que la fórmula que define h tiene sentido. Además, cuando $u_1(p) = \frac{1}{2}$, es $\langle \pi_2^e(p), -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p) \rangle_2^+ = \langle \pi_2^e(p), \frac{1}{4} \rangle_2^+ = \langle \pi_1^e(p), \frac{1}{2} \rangle_1^+ = p$, porque $2u_2|_{[P_1, P'_1]} = [P_2, P'_2]$. Del mismo modo se puede comprobar que la expresión para h no presenta ambigüedad tampoco en el caso $u_1(p) = -\frac{1}{2}$, y en definitiva se concluye que h está bien definida y es continua.

Ahora,

$$u_2 \circ h(p) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p) & \text{si } \frac{1}{2} \leq u_1(p) \leq 1 \\ \frac{1}{2}u_1(p) & \text{si } |u_1(p)| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_1(p) & \text{si } -1 \leq u_1(p) \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

es un homeomorfismo de $[-1, 1]$ en sí mismo, lo que junto con el hecho de que $\pi_2^e|_{P_1}$ y $\pi_2^s|_{P'_1}$ son homeomorfismos sobre P_2 y P'_2 respectivamente demuestra que h es una biyección. Por tanto, es una equivalencia de flujos.

Una vez que tenemos una equivalencia $h : [P_1, P'_1] \longrightarrow [P_2, P'_2]$ entre cilindros, para extenderla a N_1 y N_2 utilizaremos el siguiente lema:

Lema 1.21. Sean N_1 y N_2 bloques aislantes regulares de sendos compactos K_1 y K_2 , y sean $[P_1, P'_1] \subseteq N_1$ y $[P_2, P'_2] \subseteq N_2$ dos cilindros tales que P_1 es un entorno regular de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$. Entonces, toda equivalencia de flujos $h : [P_1, P'_1] \longrightarrow [P_2, P'_2]$ puede extenderse a una equivalencia de flujos $\hat{h} : N_1 \longrightarrow N_2$.

Demostración. Demostremos en primer lugar que h puede extenderse a N_1^e . Para ello, obsérvese que la inclusión $n_1^+ \subseteq N_1^e$ es una equivalencia *shape* por ser N_1 regular (Proposición 1.15) y esto, junto con la hipótesis de que también la inclusión $n_1^+ \subseteq P_1$ lo es, muestra que $P_1 \subseteq N_1^e$ es una equivalencia *shape*. Por el Lema B.5 se sigue que existe un homeomorfismo $(\theta_1, \rho_1) : N_1^e - \text{int}(P_1) \longrightarrow \partial P_1 \times [0, 1]$ que identifica $p_1 \in \partial P_1$ con $(p_1, 0)$.

Como una equivalencia de flujos preserva los conjuntos de entrada inmediata y se sabe que los de los cilindros $[P_1, P'_1]$ y $[P_2, P'_2]$ son, respectivamente, P_1 y P_2 , se sigue que $h(P_1) = P_2$. Asimismo $h(n_1^+) = n_2^+$ y por tanto la inclusión $n_2^+ \subseteq P_2$ es también una equivalencia *shape* y existe un homeomorfismo $(\theta_2, \rho_2) : N_2^e - \text{int}(P_2) \longrightarrow \partial P_2 \times [0, 1]$ que identifica $p_2 \in \partial P_2$ con $(p_2, 0)$. Esto permite extender h a los puntos de N_1^e en

la manera obvia, poniendo $\widehat{h}(p_1) := (\theta_2, \rho_2)^{-1}(\theta_1 \circ h, \rho_1)(p_1)$. Si $p_1 \in \partial P_1$ entonces $\theta_1(p_1) = 0$ y $\rho_1(p_1) = 0$, de donde $\widehat{h}(p_1) = (\theta_2, \rho_2)^{-1}(h(p_1), 0) = h(p_1)$ y \widehat{h} realmente extiende h .

Para cada $r_1 \in \partial P_1$, h lleva el segmento de trayectoria $[r_1, r'_1] = r_1 \cdot [0, t_1^s(r_1)]$ homeomórficamente sobre $[h(r_1), h(r_1)'] = h(r_1) \cdot [0, t_2^s \circ h(r_1)]$ mediante una reparametrización $\alpha_{r_1} : [0, t_1^s(r_1)] \longrightarrow [0, t_2^s \circ h(r_1)]$ que es la composición

$$[0, t_1^s(r_1)] \xrightarrow{r_1} [r_1, r'_1] \xrightarrow{h} [h(r_1), h(r_1)'] \xrightarrow{-t_2^s} [0, t_2^s \circ h(r_1)] .$$

Por tanto es $\alpha_{r_1}(t) := -t_2^s \circ h(r_1 \cdot t)$, y se tiene que preserva la orientación (porque lleva 0 en 0) y verifica que $h(r_1 \cdot t) = h(r_1) \cdot \alpha_{r_1}(t)$ siempre que $t \in [0, t_1^s(r_1)]$. Para ver esto último, como h es equivalencia de flujos debe ser $h(r_1 \cdot t) = h(r_1) \cdot \alpha$ para algún $\alpha \geq 0$, y aplicando $-t_2^s$ a ambos lados de la igualdad $-t_2^s \circ h(r_1 \cdot t) = -t_2^s \circ h(r_1) + \alpha = \alpha$ (se ha utilizado que $-t_2^s \circ h(r_1) = 0$ porque h preserva el conjunto de entrada), de donde $\alpha = -t_2^s \circ h(r_1 \cdot t) = -\alpha_{r_1}(t)$. Además, es claro que $\alpha_{r_1}(t)$ depende continuamente de r_1 y t .

Consideremos ahora un punto $p_1 \in N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1])$, y veamos cómo definir su imagen $\widehat{h}(p_1)$. En primer lugar, tomemos su punto de entrada $q_1 := \pi_1^e(p_1)$ y sea $r_1 := \theta_1(q_1)$. Queremos llevar $[q_1, q'_1] = q_1 \cdot [0, t_1^s(q_1)]$ homeomórficamente sobre $[\widehat{h}(q_1), \widehat{h}(q_1)'] = \widehat{h}(q_1) \cdot [0, t_2^s \circ \widehat{h}(q_1)]$, donde $\widehat{h}(q_1)$ ya está definido porque h se extendió a todo N_1^e , y esto exige reparametrizar $[0, t_1^s(q_1)]$ en $[0, t_2^s \circ \widehat{h}(q_1)]$. Además, hay que garantizar que la reparametrización elegida sea compatible con la ya existente en los puntos de ∂P_1 , condición que conseguiremos sin más que utilizar α_{r_1} . Más en concreto, sea $\alpha_{p_1} : [0, t_1^s(p_1)] \longrightarrow [0, t_2^s \circ \widehat{h} \circ \pi_1^e(p_1)]$ dada por

$$\alpha_{p_1}(t) := \alpha_{r_1} \left(t \frac{t_1^s(r_1)}{t_1^s(q_1)} \right) \frac{t_2^s \circ \widehat{h}(q_1)}{t_2^s \circ h(r_1)},$$

con $q_1 := \pi_1^e(p_1)$ y $r_1 := \theta_1(q_1)$ con la notación que se introdujo arriba. Esta expresión para α_{p_1} se ha obtenido componiendo la reparametrización lineal de $[0, t_1^s(q_1)]$ en $[0, t_1^s(r_1)]$ con α_{r_1} y la reparametrización lineal de $[0, t_2^s \circ h(r_1)]$ en $[0, t_2^s \circ \widehat{h}(q_1)]$.

De los denominadores que aparecen en la expresión para α_{p_1} solamente $t_1^s(q_1)$ se puede anular (y esto si, y sólo si, $p_1 \in N_1^e \cap N_1^s$) puesto que $t_2^s \circ h(r_1) > 0$ siempre ya que $r_1 \in \partial P_1 \subseteq \text{int}(N_1^e)$ implica que $h(r_1) \in \text{int}(N_2^e)$. Así, si $p_1 \notin N_1^e \cap N_1^s$ entonces α_{p_1} es una reparametrización que preserva la orientación, y para $p_1 \in N_1^e \cap N_1^s$ ponemos α_{p_1} la reparametrización “degenerada” $\alpha_{p_1} : [0, 0] \longrightarrow [0, 0]$. Afirmamos que $\alpha_{p_1}(t)$ es continua en las dos variables (p_1, t) en su dominio

$$\mathcal{D} = \{(p_1, t) : p_1 \in N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1]) \text{ y } 0 \leq t \leq t_1^s(p_1)\},$$

y ello es claro en los puntos con $p_1 \notin N_1^e \cap N_1^s$, porque ningún denominador se anula en la fórmula para α_{p_1} y además α_{r_1} depende continuamente de r_1 y t . Ahora, si $(p^k, t^k) \subseteq \mathcal{D}$ converge a $(p_1, t) \in \mathcal{D}$ con $p_1 \in N_1^e \cap N_1^s$, necesariamente $t = 0$ y además $q^k = \pi_1^e(p^k) \longrightarrow p_1$ y $r^k \longrightarrow r_1$. Como por definición $\text{im}(\alpha_{r^k}) = [0, t_2^s \circ h(r^k)]$, se concluye que si k es suficientemente grande entonces

$$\alpha_{r^k} \left(t_k \frac{t_1^s(r^k)}{t_1^s(q^k)} \right) \leq t_2^s \circ h(r_1) + 1.$$

Como $(r^k) \subseteq \partial P_1$, que es un compacto, y $t_2^s \circ h|_{\partial P_1} > 0$, se sigue que existe $\varepsilon > 0$ tal que $t_2^s \circ h(r^k) > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente $t_2^s \circ \hat{h}(q^k) \rightarrow t_2^s \circ \hat{h}(p_1) = 0$ porque $\hat{h}(p_1) \in \partial N_2^e$, y así

$$\alpha_{p^k}(t^k) \leq (t_2^s \circ h(r) + 1) \frac{t_2^s \circ \hat{h}(q^k)}{\varepsilon} \rightarrow 0 = \alpha_{p_1}(0).$$

Ahora utilizaremos las reparametrizaciones α_{p_1} para terminar de extender \hat{h} poniendo

$$\hat{h}(p_1) := \begin{cases} \hat{h} \circ \pi_1^e(p_1) \cdot \alpha_{p_1}(-t_1^e(p_1)) & \text{si } p_1 \in N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1]), \\ h(p_1) & \text{si } p \in [P_1, P'_1]. \end{cases}$$

Para ver que está bien definida, fijemos $p_1 \in [\partial P_1, \partial P'_1]$. Entonces $r_1 = q_1 = \pi_1^e(p_1)$, o también $p_1 = r_1 \cdot (-t_1^e(p_1))$, de donde $\hat{h}(p_1) = h(r_1) \cdot \alpha_{r_1}(-t_1^e(p_1))$. Pero además $\alpha_{p_1} = \alpha_{r_1}$, luego $\hat{h} \circ \pi_1^e(p_1) \cdot \alpha_{p_1}(-t_1^e(p_1)) = h(r_1) \cdot \alpha_{r_1}(-t_1^e(p_1)) = h(p_1)$. Finalmente, es claro por definición que \hat{h} es continua y lleva cada segmento $[p_1, p'_1]$ biyectivamente (y por tanto homeomórficamente) en $[\hat{h}(p_1), \hat{h}(p'_1)]$. Como la restricción de \hat{h} a N_1^e es una biyección por construcción, se concluye que también lo es \hat{h} y por tanto es una equivalencia de flujos. \square

Esto completa la prueba del Teorema 1.3. \square

Observación 1.22. En la prueba del Lema 1.21 no se ha utilizado que h es una equivalencia de flujos en todo $[P_1, P'_1]$, sino sólo que lo es en su cara lateral $[\partial P_1, \partial P'_1]$. Por tanto se puede reformular como sigue: sean N_1 y N_2 bloques aislantes regulares de sendos compactos K_1 y K_2 , y sean $[P_1, P'_1] \subseteq N_1$ y $[P_2, P'_2] \subseteq N_2$ dos cilindros tales que P_1 es un entorno regular de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$ y P_2 es un entorno regular de n_2^+ en $\text{int}(N_2^e)$. Entonces, toda equivalencia de flujos $h : [\partial P_1, \partial P'_1] \rightarrow [\partial P_2, \partial P'_2]$ puede extenderse a una equivalencia de flujos $\hat{h} : N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1]) \rightarrow N_2 - \text{int}_{N_2}([P_2, P'_2])$.

1.6. Generalización a variedades con borde

Los resultados de este capítulo pueden generalizarse al caso en que la variedad M tiene, posiblemente, borde. En ese caso es preciso adaptar la Definición 1.1 sustituyendo la palabra “borde” por “frontera” (topológica), y en general esta adaptación habrá que hacerla en todos los argumentos que conducen a la prueba del Teorema 1.2. En relación a esta última, el único punto de la misma que requiere revisión es el Lema 1.8, puesto que la existencia de entornos regulares de compactos de tipo finito en superficies está garantizada incluso aunque la superficie tenga borde (Observación B.6).

El Lema 1.8 queda sustituido por la siguiente versión:

Lema 1.8'. Sea N un bloque aislante en una 3-variedad con borde M . Cada punto $p \in \text{int}(N^e)$ posee un entorno en ∂N homeomorfo a \mathbb{R}^2 o a \mathbb{H}^2 y un entorno en N homeomorfo a \mathbb{H}^3 .

Para demostrar esta nueva versión sirve la prueba del Lema 1.8, pero considerando que ahora las variedades homológicas involucradas pueden tener borde. Un ANR X

(metrizable y localmente compacto) de dimensión finita es una n -variedad homológica con borde si $H_k(X, X - p) = 0$ siempre que $k \neq n$ y $H_n(X, X - p) = \mathbb{Z}$ ó 0. Se define entonces su borde de manera natural como $\partial X := \{p \in X : H_n(X, X - p) = 0\}$.

Evidentemente toda n -variedad topológica con borde es una n -variedad homológica con borde, y los resultados de [61] que se mencionan en la introducción en relación al producto de variedades homológicas son aún válidos. También sigue siendo cierto que toda 2-variedad homológica con borde es una 2-variedad topológica con borde, pero puesto que no hemos podido encontrar ninguna referencia que contenga una prueba de este hecho, aportamos una aquí:

Lema 1.23. *Toda 2-variedad homológica X con borde es una 2-variedad topológica con borde.*

Demostración. Sea X^* otra copia de X y denotemos DX el doble de X , que se obtiene al pegar X y X^* identificando $(\partial X)^* \subseteq X^*$ con $\partial X \subseteq X$ del modo natural. Afirmamos que DX es 2-variedad homológica.

Por [81, Theorem., p. 510] es ∂X una 1-variedad homológica sin borde, y por tanto es una 1-variedad topológica sin borde (en [81] no se exige que las variedades homológicas sean ANR's, pero esta condición tampoco es necesaria para garantizar que una 1-variedad homológica sea 1-variedad topológica). Además es cerrada en X por [81, Lemma 2., p. 510]. Todo esto implica que DX es un ANR metrizable, localmente compacto y de dimensión finita. Además, como $\partial X \subseteq DX$ es cerrado, $DX - (\partial X) = (X - \partial X) \oplus (X^* - \partial X)^*$ y esto garantiza que cualquier punto de este conjunto satisface la condición homológica local $H_k(DX, DX - p) = \mathbb{Z}$ si $k = 2$ ó 0 en otro caso.

Ahora, si $p \in \partial X = (\partial X)^* \subseteq DX$, entonces $(DX, DX - p) = (X, X - p) \cup (X^*, X^* - p)$ y $(X, X - p) \cap (X^*, X^* - p) = (\partial X, \partial X - p)$. Así, de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\dots \longrightarrow H_k(\partial X, \partial X - p) \longrightarrow H_k(X, X - p) \bigoplus H_k(X^*, X^* - p) \longrightarrow H_k(DX, DX - p) \longrightarrow \dots$$

se tiene $H_k(DX, DX - p) = H_{k-1}(\partial X, \partial X - p)$, pues $H_k(X, X - p) = H_k(X^*, X^* - p) = 0$ ya que $p \in \partial X$. Como por [81, Theorem., p. 510] es $H_{k-1}(\partial X, \partial X - p) = \mathbb{Z}$ si $k = 2$ o 0 en otro caso, se concluye que DX es 2-variedad homológica sin borde, y por tanto 2-variedad topológica. En definitiva, ∂X es una 1-variedad topológica sin borde en la 2-variedad topológica sin borde DX , y en consecuencia es bicollarada (esto se sigue, por ejemplo, de [53, Theorem 13., p. 79]). Por tanto X es 2-variedad topológica con borde ∂X . \square

De toda esta argumentación se sigue también que las aplicaciones presentadas en la segunda sección son también válidas si M tiene borde, a excepción del Corolario 1.18.

Respecto al resultado de unicidad, sólo el Lema 1.21 necesita ser revisado, y se puede comprobar que se puede adaptar sin muchas dificultades para funcionar también en el caso en que M tiene borde. Esencialmente, sólo es necesario establecer la existencia de los homeomorfismos (θ_1, ρ_1) y (θ_2, ρ_2) , y esto (que ahora ya no se deriva del Lema B.5) se puede hacer, por ejemplo, utilizando el *regular neighbourhood collaring theorem* [65, 3.18 Corollary., p. 36].

Capítulo 2

Caracterización topológica de los compactos invariantes aislados con *shape* trivial

Introducción. Nos centraremos en este breve capítulo en el estudio de los compactos invariantes aislados con *shape* trivial en 3-variedades. Más en concreto, se plantea el siguiente problema: si $K \subseteq M$ es un compacto con *shape* trivial en una 3-variedad topológica con borde M , ¿bajo qué condiciones puede definirse un flujo en M para el cual K sea un compacto invariante aislado? Cuando se pueda, ¿habrá alguna restricción sobre el índice de Conley de K ? Esta cuestión se encuadra dentro de resultados como el contenido en [29], donde se prueba que cualquier compacto (metrizable) finito dimensional y con *shape* poliedral puede encajarse como un atractor estable en algún espacio euclídeo, u otras situaciones contrastantes como las descritas en los Ejemplos 1.20, 2.7 ó 4.20.

A lo largo de todo este capítulo se supone válida la Conjetura de Poincaré para dimensión 3. Necesitaremos la siguiente formulación:

Lema 2.1. *Sea N una 3-variedad compacta con *shape* trivial. Entonces N es una 3-celda.*

Demostración. En primer lugar, ∂N es la 2-esfera. En efecto, es una 2-variedad compacta y por dualidad de Lefschetz

$$H_k(N; \mathbb{Z}_2) = H^{3-k}(N, \partial N; \mathbb{Z}_2) = \tilde{H}^{2-k}(\partial N; \mathbb{Z}_2),$$

de donde ∂N tiene los grupos de homología de \mathbb{S}^2 y por el teorema de clasificación de superficies debe ser homeomorfa a ella.

Sea $\hat{N} := N \cup \mathbb{D}^3$ el resultado de pegar una 3-bola \mathbb{D}^3 a N para eliminar su borde ∂N . Es claro que \hat{N} es una 3-variedad compacta, conexa y sin borde. Además, es simplemente conexa, lo que probamos a continuación. Si $C_1 = \partial N \times [0, 1]$ denota un collar interior de ∂N en N (aquí se identifica $\partial N \times \{0\}$ con ∂N) y $C_2 = \partial \mathbb{D}^3 \times [0, 1]$ denota un collar interior de $\partial \mathbb{D}^3$ en \mathbb{D}^3 (aquí se identifica $\partial \mathbb{D}^3 \times \{0\}$ con $\partial \mathbb{D}^3$), los conjuntos $U_1 := \mathbb{D}^3 \cup C_1 \subseteq \hat{N}$ y $U_2 := N \cup C_2 \subseteq \hat{N}$ son abiertos cuya unión es todo \hat{N} . Además U_1 retracta por deformación fuerte sobre \mathbb{D}^3 , y U_2 lo hace sobre N , de modo que ambos son simplemente conexos. En virtud del teorema de Seifert–van Kampen se sigue que $\pi_1(\hat{N}) = 0$. La Conjetura de Poincaré implica entonces que \hat{N} es (homeomorfa a) la 3-esfera.

Finalmente, ∂N es una 2-esfera bicollarada en \hat{N} , ya que posee el bicollar $C_1 \cup C_2$, por ejemplo. Así pues, por el teorema de Schönflies para esferas bicollaradas [14] se tiene que ∂N separa \hat{N} en dos componentes conexas cuyas clausuras son la 3-bola. Pero es claro que $\hat{N} - \partial N = \text{int}(N) \cup \text{int}(\mathbb{D}^3)$, de modo que dichas componentes conexas son precisamente $\text{int}(N)$ y $\text{int}(\mathbb{D}^3)$. Además, como ningún subcerrado propio de ∂N separa, $\overline{\text{int}(N)} = \text{int}(N) \cup \partial N = N$. Esto prueba que N es una 3-celda. \square

Corolario 2.2. *Si K es un compacto invariante aislado con shape trivial para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde, todo bloque aislante regular suyo es una 3-celda. En particular, K posee una base de bloques aislantes que son 3-celdas.*

Demostración. Es inmediata a partir del Lema 2.1 y el Teorema 1.2. \square

Existen casos particulares del Corolario 2.2 que no requieren de la Conjetura de Poincaré. Por ejemplo, supongamos que K es un compacto invariante aislado con shape trivial contenido en \mathbb{R}^3 . Si N es un bloque aislante regular para K , por un argumento homológico (como el del Lema 2.1) se sigue que ∂N es la 2-esfera. Ahora, no es difícil comprobar que en la construcción de los bloques aislantes regulares que se expone en el Teorema 1.2 puede conseguirse que ∂N sea bicollarada en M (basta extender un bicollar de ∂P en ∂N), y por el Teorema de Schönflies para esferas bicollaradas ([14]) se concluye que ∂N separa M en dos componentes conexas tales que la clausura de la acotada es precisamente la 3-bola. Pero dicha clausura coincide con N , de donde se sigue el aserto.

Del Corolario 2.2 y el Teorema 1.2 se sigue ya que hay una propiedad distintiva de los compactos invariantes aislados con shape trivial, que es la de ser *celulares* (puede no estar de más recordar aquí que un compacto K contenido en una n -variedad M se dice *celular* en M si posee una base de entornos en M que son n -celdas). Y el Teorema 2.3, que enunciamos a continuación, muestra que la celularidad es de hecho una propiedad característica de los compactos invariantes aislados con shape trivial.

Teorema 2.3. *Sea K un compacto de shape trivial contenido en el interior de una 3-variedad sin borde M . Entonces, K es un compacto invariante aislado para algún flujo continuo en M si, y sólo si, K es celular en M .*

La prueba de (\Rightarrow) en el Teorema 2.3 es inmediata, pero será conveniente destacarla para futura referencia:

Proposición 2.4. *Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad M . Entonces K posee shape trivial si, y sólo si, es celular en M .*

Demostración. Es obvio que un compacto celular tiene shape trivial. Para la otra implicación, aplíquese el Corolario 2.2. \square

Mostrar (\Leftarrow) en el Teorema 2.3 requiere un poco más de trabajo. Necesitaremos dos resultados previos, los Lemas 2.5 y 2.6.

Lema 2.5. *Sea K un compacto con shape trivial en una 3-variedad conexa M . Cada una de estas afirmaciones implica la siguiente:*

1. K es celular.
2. M/K es homeomorfo a M .

3. $M - K$ es homeomorfo a $M - p$, cualquiera que sea $p \in M$.

Demostración. Denotemos por $\pi : M \longrightarrow M/K$ la proyección canónica.

(1) \Rightarrow (2) Supuesto que K es celular, sea $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de entornos compactos de K en M tales que todos son 3-bolas y además $N_{k+1} \subseteq \text{int}(N_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces K es celular también en la bola abierta $\text{int}(N_2)$, y por [14, Theorem 1., p. 74] existe $f : N_2 \longrightarrow N_2$ continua y sobre tal que $f|_{\partial N_2} = \text{id}$ y el único conjunto inverso (*inverse set*, en la terminología de [14]) de f es precisamente K . Extendamos f a todo M por la identidad para los puntos de $M - N_2$; la condición $f|_{\partial N_2} = \text{id}$ garantiza que la aplicación así construida, que volvemos a denotar por $f : M \longrightarrow M$, es también continua. Además es sobreyectiva y su único inverso es K . Factoricemos ahora f a través de K para obtener

$$\bar{f} : M/K \longrightarrow M$$

continua y biyectiva. Como N_1 es compacta, también lo es N_1/K y por tanto la restricción $\bar{f}|_{N_1/K} : N_1/K \longrightarrow N_1$ es un homeomorfismo (porque es una aplicación continua y biyectiva con dominio compacto y rango Hausdorff). Por otro lado, trivialmente $\bar{f}|_{M/K - N_2/K} = (\pi|_{M - N_2})^{-1}$ también es un homeomorfismo. En consecuencia, y puesto que la unión de los interiores de N_1/K y $M/K - N_2/K$ cubre M/K , se sigue que \bar{f} es un homeomorfismo.

(2) \Rightarrow (3) Sea $h : M/K \longrightarrow M$ un homeomorfismo. Denotemos $[K] \in M/K$ el punto $[K] := \pi(K)$ y pongamos $q := h([K])$; es claro entonces que h se restringe a un homeomorfismo de $M/K - [K]$ en $M - q$. Por otro lado, $\pi|_{M/K - [K]} : M/K - [K] \longrightarrow M - K$ es un homeomorfismo, y así $M - K \cong M - q$. Finalmente, como M es conexa hay una isotopía de M que lleva p en q y en particular $M - p \cong M - q$. \square

Lema 2.6. *Sea φ un flujo continuo en M/K que tiene a $[K]$ por punto fijo. Existe un flujo continuo $\hat{\varphi}$ en M que deja fijos todos los puntos de K y coincide con φ en $M - K$ salvo reparametrizaciones de las trayectorias.*

Demostración. La prueba es una adaptación de un argumento de Beck [6]. Sea $f : M \longrightarrow [1, +\infty]$ una función continua tal que $f^{-1}(+\infty) = K$. Para cada $p \in M - K$ se considera la aplicación

$$t \mapsto \int_0^t f(p \cdot \tau) d\tau.$$

Puesto que $g'_p(t) = f(p \cdot t) \geq 1$ para cada $t \in \mathbb{R}$, es claro que $g_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo. Por tanto tiene sentido definir, para $p \in M - K$ y todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\varphi}(p, s) = p \cdot g_p^{-1}(s).$$

Vamos a comprobar que $\hat{\varphi}$ es un flujo continuo en $M - K$ que puede ser extendido a K dejando todos los puntos de éste fijos.

(1) $\hat{\varphi}$ es continuo. Supongamos que $(p_k, s_k) \longrightarrow (p, s)$ en $(M - K) \times \mathbb{R}$, y por definición es $\hat{\varphi}(p_k, s_k) = p_k \cdot t_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, donde

$$g_{p_k}(t_k) = \int_0^{t_k} f(p_k \cdot \tau) d\tau = s_k.$$

Como $f \geq 1$, se tiene $|s_k| \geq |t_k|$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y podemos por ello suponer sin pérdida de generalidad que $t_k \longrightarrow t \in \mathbb{R}$. Por otra parte, es claro que $g_p(t)$ es una

función continua de p y de t . En consecuencia $g_{p_k}(t_k) \longrightarrow g_p(t)$ o, lo que es lo mismo, $s_k \longrightarrow g_p(t)$. Se deduce así que $s = g_p(t)$ y por tanto $\widehat{\varphi}(p_k, s_k) = p_k \cdot t_k \longrightarrow p \cdot t = \widehat{\varphi}(p, s)$.

(2) $\widehat{\varphi}$ es un flujo en $M - K$. Que $\widehat{\varphi}(p, 0) = p$ para cualquier $p \in M - K$ es claro, ya que $g_p(0) = 0$ y por tanto $g_p^{-1}(0)$. Ahora, para cualesquiera $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $p \in M - K$ es

$$g_p(t_1 + t_2) = \int_0^{t_1+t_2} f(p \cdot \tau) d\tau = \int_0^{t_1} f(p \cdot \tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} f(p \cdot \tau) d\tau$$

y puesto que

$$\int_{t_1}^{t_1+t_2} f(p \cdot \tau) d\tau = \int_0^{t_2} f(p \cdot (\tau + t_1)) d\tau = \int_0^{t_2} f((p \cdot t_1) \cdot \tau) d\tau,$$

obtenemos $g_p(t_1 + t_2) = g_p(t_1) + g_{p \cdot t_1}(t_2)$, o también

$$t_1 + t_2 = g_p^{-1}(g_p(t_1) + g_{p \cdot t_1}(t_2)).$$

Si ponemos $t_1 := g_p^{-1}(s_1)$ y $t_2 := g_{\widehat{\varphi}(p, s_1)}^{-1}(s_2)$, la igualdad anterior queda

$$g_p^{-1}(s_1) + g_{\widehat{\varphi}(p, s_1)}^{-1}(s_2) = g_p^{-1}(s_1 + s_2)$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(p, s_1 + s_2) &= \\ &= p \cdot g_p^{-1}(s_1 + s_2) = p \cdot (g_p^{-1}(s_1) + g_{\widehat{\varphi}(p, s_1)}^{-1}(s_2)) = \\ &= \widehat{\varphi}(p, s_1) \cdot g_{\widehat{\varphi}(p, s_1)}^{-1}(s_2) = \widehat{\varphi}(\widehat{\varphi}(p, s_1), s_2). \end{aligned}$$

(3) $\widehat{\varphi}$ admite una extensión continua a todo M si se dejan los puntos de K fijos, es decir, poniendo $\widehat{\varphi}(p, s) = p$ para todo $p \in K$ y $s \in \mathbb{R}$. Para probar esto es suficiente mostrar que si $M - K \supseteq (p_k) \longrightarrow p \in K$ y $s_k \longrightarrow s \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{\varphi}(p_k, s_k) \longrightarrow p$. Pongamos $\widehat{\varphi}(p_k, s_k) = p_k \cdot t_k$, de modo que

$$\int_0^{t_k} f(p_k \cdot \tau) d\tau = s_k.$$

Afirmamos que $t_k \longrightarrow 0$. Supuesto que no fuese así, y quizás pasando a una subsecuencia, existiría $t > 0$ tal que $|t_k| \geq t > 0$ para todo k . Sea U un entorno de K en M tal que $f|_U \geq R/t$, donde R es un número cualquiera estrictamente mayor que $|s|$. Denotemos por $\pi : M \longrightarrow M/K$ la proyección canónica: como $[K] := \pi(K)$ es un punto fijo para φ y $\pi(U)$ es un entorno suyo en M/K , existe otro entorno W de $[K]$ en M/K tal que $W \cdot [0, t] \subseteq \pi(U)$, de donde poniendo $V := \pi^{-1}(W)$ se obtiene un entorno de K en M tal que $p \cdot [0, t] \subseteq U$ para cualquier $p \in V - K$. Entonces, si k es suficientemente grande para que $p_k \in V$, se tendría

$$|s_k| = \left| \int_0^{t_k} f(p_k \cdot \tau) d\tau \right| \geq \left| \int_0^t f(p_k \cdot \tau) d\tau \right| \geq t \frac{R}{t} = R$$

y por ello $|s| \geq R > |s|$, contradicción. Se sigue entonces que $t_k \longrightarrow 0$ y por tanto $\widehat{\varphi}(p_k, s_k) = p_k \cdot t_k \longrightarrow p$. \square

Demostración. (de la implicación (\Leftarrow) del Teorema 2.3.) Supongamos que K es celular. Por la parte (2) del Lema 2.5, existe un entorno abierto U de $[K]$ en M/K que es homeomorfo a \mathbb{R}^3 , y podemos suponer que $[K]$ va al origen bajo ese homeomorfismo. Entonces se puede transportar a U cualquier flujo en \mathbb{R}^3 que tenga al origen por compacto invariante aislado y conste de puntos fijos fuera de la bola unidad, y posteriormente extender al resto de M/K dejando los puntos fijos. Aplicando el Lema 2.6 se obtiene un sistema dinámico en M que tiene a K como compacto invariante aislado. \square

Puede observarse además (bien por construcción, bien aplicando la parte (2) de la Proposición 3.12 y la Proposición 3.17) que el índice de Conley de K en M es el mismo que el de el origen en \mathbb{R}^3 para el flujo que hayamos elegido. Del trabajo del Capítulo 3 se deducirá que puede conseguirse cualquier índice homológico prefijado.

Ya en el Ejemplo 1.20 se mostró cómo “la mayoría” de los solenoides no pueden ser compactos invariantes aislados para ningún flujo en una 3-variedad, y el motivo era que no poseen *shape* poliedral a pesar de tener grupos de cohomología de Čech con coeficientes en \mathbb{Z}_2 finitamente generados (lo cual contradice el Corolario 1.19). Persiste no obstante la duda razonable de si existen compactos con *shape* poliedral que posean la misma propiedad, es decir, que no puedan ser compactos invariantes aislados en una 3-variedad, y el Ejemplo 2.7 prueba que la respuesta es afirmativa.

Ejemplo 2.7. La bola de Alexander B (véase [1] para la descripción original y [36, p. 176] para una excelente ilustración, así como referencias históricas), a pesar de ser homeomorfa a la 3-bola cerrada estándar (y, en particular, tener *shape* trivial), no puede ser un compacto invariante aislado en \mathbb{S}^3 .

Demostración. En efecto, si lo fuera, por la Proposición 2.4 y el Lema 2.5 se tendría que $\mathbb{S}^3 - B$ debería ser homeomorfa a $\mathbb{S}^3 - p$ (donde p es un punto cualquiera de \mathbb{S}^3), que no es sino una 3-bola abierta. No obstante, se sabe que $\mathbb{S}^3 - B$ no es simplemente conexo mientras que una 3-bola abierta sí lo es, y esta contradicción completa el argumento. \square

Puede ser instructivo comparar el Ejemplo 2.7 con el resultado citado en la introducción de que todo compacto finito dimensional con *shape* poliedral puede ponerse como un atractor dentro de un espacio euclídeo. Naturalmente, esto no entra en contradicción con el Ejemplo 2.7, pues en nuestro contexto existe la exigencia adicional de que el compacto debe sumergirse una 3-variedad.

Observación 2.8. Como observación final, digamos que las tres condiciones enunciadas en el Lema 2.5 son, de hecho, equivalentes. Que $(3) \Rightarrow (2)$ es inmediato, y para ver que $(2) \Rightarrow (1)$ sólo hace falta estudiar la demostración del Teorema 2.3 y observar que allí no se utiliza la celularidad de K , sino tan sólo que satisface la propiedad (2).

Obtenemos así un ejemplo de aplicación de técnicas dinámicas para probar un resultado netamente topológico.

Capítulo 3

Una clasificación de flujos en torno a compactos invariantes con *shape* trivial

Introducción. Es muy frecuente en matemáticas elaborar teorías que se refieran a objetos cuya definición es puramente axiomática. Así sucede en el caso de los sistemas dinámicos, que son aplicaciones continuas $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ que satisfacen $\varphi_0 = \text{id}_M$ y $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, pero también —por ejemplo— con los grupos, las superficies compactas, las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, etc...

En cualquiera de estas situaciones suele ser fácil comprobar que un cierto ejemplo concreto satisface los axiomas y es, por tanto, un objeto de nuestro estudio. Sin embargo, no lo es tanto *enumerar* y *clasificar* todos los objetos que satisfacen los axiomas, y cualquier resultado orientado en esta dirección tiene gran interés. Así podemos citar el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados, el teorema de clasificación de superficies compactas, la existencia de la forma canónica de Jordan como herramienta para clasificar los homomorfismos entre espacios vectoriales, etc...

En el marco de los sistemas dinámicos podemos destacar el siguiente

Teorema. Sean p_1 y p_2 puntos de equilibrio hiperbólicos para dos ecuaciones diferenciales $(E_1) : \dot{p}_1 = f_1(p_1)$ y $(E_2) : \dot{p}_2 = f_2(p_2)$ en sendas n -variedades. Entonces, los flujos determinados por (E_1) y (E_2) en torno a p_1 y p_2 son topológicamente equivalentes si, y sólo, si, el número de autovalores con parte real negativa de $D_{p_1}f_1$ y $D_{p_2}f_2$ coincide.

que se obtiene combinando el Teorema de Hartman–Grobman, según el cual las ecuaciones (E_1) y (E_2) son localmente equivalentes en torno a p_1 y p_2 a sus respectivas linealizadas, con una clasificación de sistemas lineales que en última instancia se deriva de la forma canónica de Jordan.

Queremos obtener algo similar en nuestro contexto, pero reemplazando p_1 y p_2 por compactos invariantes aislados K_1 y K_2 con *shape* trivial y los flujos definidos a través de las ecuaciones diferenciales por flujos continuos arbitrarios φ_1 y φ_2 . Puesto que emplearemos de manera esencial bloque aislantes regulares, nos restringiremos siempre a espacios de fases que sean variedades sin borde y de dimensión no mayor que 3 (aunque enunciaremos los resultados para variedades de dimensión 3). Además será necesario introducir también una nueva noción de equivalencia local de flujos en torno a compactos invariantes, las *st-equivalencias de flujos*.

Motivación. Cualquier noción razonable, en la categoría **Top**, de equivalencia de flujos en torno a compactos invariantes K_1 y K_2 implica que éstos son homeomorfos entre sí. Así pues, si nuestro objetivo es estudiar los flujos continuos en torno a compactos con *shape* trivial, deberemos definir en primer lugar una noción de equivalencia que no tenga consecuencias tan fuertes sobre los compactos invariantes en cuestión (por ejemplo, que induzca sólo una equivalencia *shape* entre ellos, pero no necesariamente un homeomorfismo). En este sentido necesitamos equivalencias de naturaleza homotópica, por así decirlo. Sin embargo, y aunque el comportamiento del flujo en el propio compacto invariante no es de nuestro interés, sí queremos capturar el aspecto de las trayectorias en torno al mismo. En este sentido necesitamos equivalencias de naturaleza netamente topológica.

La solución que proponemos consiste en introducir unos morfismos que presentan un comportamiento mixto: por un lado, sobre ciertos abiertos de su dominio actúan exactamente igual que una aplicación continua ordinaria y, por otro lado, su restricción a ciertos compactos señalados induce morfismos *shape*. A esto dedicamos nuestras dos primeras secciones.

3.1. Homotopías aproximativas

Una *homotopía aproximativa* $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ entre dos variedades compactas N_1 y N_2 es una aplicación continua $F : N_1 \times [0, +\infty) \longrightarrow N_2$. Denotaremos por $\mathbf{F}_t : N_1 \longrightarrow N_2$ cada una de las aplicaciones parciales $\mathbf{F}_t(p) := F(p, t)$. Detrás de esta definición subyace la idea intuitiva (que debe resultar familiar de la teoría de la forma) de que estamos interesados en el morfismo “límite” de las \mathbf{F}_t cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Definición 3.1. Sean N_1 , N_2 y N_3 variedades compactas.

1. Si $f : N_1 \longrightarrow N_2$ es una aplicación continua, induce de modo trivial una homotopía aproximativa $\mathbf{f} : N_1 \longrightarrow N_2$ dada por $\mathbf{f}(p, t) := f(p)$.
2. Si $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ y $\mathbf{G} : N_2 \longrightarrow N_3$ son homotopías aproximativas, se define su composición $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_3$ como la homotopía aproximativa dada por $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_t := \mathbf{G}_t \circ \mathbf{F}_t$.
3. Si $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ tiene la propiedad de que \mathbf{F}_t es un homeomorfismo para cada $t \in [0, +\infty)$, diremos que \mathbf{F} es una *isotopía aproximativa* y definiremos su inversa $\mathbf{F}^{-1} : N_2 \longrightarrow N_1$ como la homotopía aproximativa dada por $(\mathbf{F}^{-1})_t := (\mathbf{F}_t)^{-1}$. Véase la nota al pie¹.

Justificación. Se hace necesario justificar que todas las aplicaciones construidas en la definición anterior son efectivamente homotopías aproximativas. Haremos sólo el tercer caso, pues los dos primeros son inmediatos.

Hay que ver si $\mathbf{F}_t^{-1}(q)$ es continua en las dos variables. Sea $(q_n, t_n) \longrightarrow (q, t)$ en $N_2 \times [0, +\infty)$, y pongamos $p_n := \mathbf{F}_{t_n}^{-1}(q_n)$. Como N_1 es compacto, podemos suponer (probablemente pasando a una subsucesión) que $p_n \longrightarrow p$. De la continuidad de F se sigue entonces que $\mathbf{F}_{t_n}(p_n) \longrightarrow \mathbf{F}_t(p)$ y, por otro lado, por la definición de p_n se tiene

¹Esta definición justifica también que en adelante utilicemos la notación \mathbf{F}_t^{-1} para la aplicación parcial $(\mathbf{F}^{-1})_t$, pues elimina su posible ambigüedad ya que podría en principio referirse también a $(\mathbf{F}_t)^{-1}$.

que $\mathbf{F}_{t_n}(p_n) = q_n \longrightarrow q$. En consecuencia $q = \mathbf{F}_t(p)$ y esto prueba $p = \mathbf{F}_t^{-1}(q)$, como queríamos. \square

Ya señalamos al comienzo de este apartado que haríamos uso de morfismos que fuesen una mixtura de un morfismo *shape* y una aplicación continua ordinaria. Pasamos ahora a introducir las nociones necesarias para manejar ambas componentes.

Aspectos *shape* de las homotopías aproximativas

Definición 3.2. Si $A_1 \subseteq N_1$ y $A_2 \subseteq N_2$ son compactos y $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ es una homotopía aproximativa, diremos que \mathbf{F}_∞ es *continua de A_1 en A_2* , y lo denotaremos por $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$, si para todo $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(A_2)$ existen $U_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(A_1)$ y un real $t \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s(U_1) \subseteq U_2$ para todo $s \geq t$.

En caso de que $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ sea una isotopía aproximativa, la notación $\mathbf{F}_\infty(A_1) = A_2$ significará por definición que $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$ y $\mathbf{F}_\infty^{-1}(A_2) = A_1$.

Esta noción se comporta bien respecto a unión, intersección y composición. En concreto, se tiene la siguiente

Proposición 3.3. Sean $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ y $\mathbf{G} : N_2 \longrightarrow N_3$ homotopías aproximativas y $A_1, B_1 \subseteq N_1$, $A_2, B_2 \subseteq N_2$ y $A_3 \subseteq N_3$ compactos. Supongamos que $\mathbf{F}_\infty(A_1) = A_2$, $\mathbf{F}_\infty(B_1) \subseteq B_2$ y $\mathbf{G}_\infty(A_2) \subseteq A_3$. Entonces:

1. $\mathbf{F}_\infty(A_1 \cap B_1) \subseteq A_2 \cap B_2$,
2. $\mathbf{F}_\infty(A_1 \cup B_1) \subseteq A_2 \cup B_2$,
3. $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_\infty(A_1) \subseteq A_3$.

Demostración. (1) Sea $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(A_2 \cap B_2)$. Entonces los conjuntos $A_2 - U_2$ y $B_2 - U_2$ son dos compactos disjuntos, de modo que poseen sendos entornos abiertos V_2^* y W_2^* respectivamente tales que $V_2^* \cap W_2^* = \emptyset$. Pongamos $V_2 := U_2 \cup V_2^*$ y $W_2 := U_2 \cup W_2^*$, que son entornos abiertos de A_2 y B_2 respectivamente y satisfacen además por construcción la condición de que $V_2 \cap W_2 = U_2$. Ahora, como $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$ y $\mathbf{F}_\infty(B_1) \subseteq B_2$, se sigue que existen $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ y $V_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(A_1)$, $W_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(B_1)$ tales que $\mathbf{F}_s(V_1) \subseteq V_2$ para $s \geq t_1$ y $\mathbf{F}_s(W_1) \subseteq W_2$ para $s \geq t_2$. Eligiendo $t := \max\{t_1, t_2\}$ y $U_1 := V_1 \cap W_1$, para $s \geq t$ es $\mathbf{F}_s(U_1) \subseteq V_2 \cap W_2 = U_2$, lo que concluye la prueba.

(2) Es trivial.

(3) Si $U_3 \in \mathcal{E}_{N_3}(A_3)$ entonces existen $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(A_2)$ y $t_2 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{G}_s(U_2) \subseteq U_3$ para todo $s \geq t_2$; asimismo existen $U_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(A_1)$ y $t_1 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s(U_1) \subseteq U_2$ para $s \geq t_1$ y tomando $t := \max\{t_1, t_2\}$ se tiene, para $s \geq t$, que $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_s(U_1) = \mathbf{G}_s \circ \mathbf{F}_s(U_1) \subseteq \mathbf{G}_s(U_2) \subseteq U_3$. \square

Si $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$, entonces \mathbf{F} determina de manera unívoca un morfismo *shape* entre A_1 y A_2 , que denotaremos $\mathbf{F}_\infty|_{A_1} : A_1 \longrightarrow A_2$, porque $\{\mathbf{F}_k|_{A_1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una aplicación aproximativa entre A_1 y A_2 (*approximative map* en la terminología de Borsuk [12]).

Proposición 3.4. Sean $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ y $\mathbf{G} : N_2 \longrightarrow N_3$ homotopías aproximativas, $A_1 \subseteq N_1$, $A_2 \subseteq N_2$ y $A_3 \subseteq N_3$ compactos. Si $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$ y $\mathbf{G}_\infty(A_2) \subseteq A_3$, entonces $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_\infty(A_1) \subseteq A_3$ y además $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_\infty|_{A_1} = \mathbf{G}_\infty|_{A_2} \circ \mathbf{F}_\infty|_{A_1}$. En particular, si \mathbf{F} es una isotopía aproximativa y $\mathbf{F}_\infty(A_1) = A_2$, el morfismo \mathbf{F}_∞ es una equivalencia *shape*.

Demostración. El aserto relativo a la composición es evidente, y la afirmación relativa a las isotopías aproximativas se sigue deduce de lo anterior sin más que tomar $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$. \square

Aspectos topológicos de las homotopías aproximativas

Definición 3.5. Si A_1 es un subconjunto arbitrario de N_1 y $f : A_1 \rightarrow N_2$ es una aplicación continua, diremos que \mathbf{F} se estabiliza a f en A_1 , y lo representaremos por $\mathbf{F}_\infty|_{A_1} = f$, si para todo $p \in A_1$ existen $U_1 \in \mathcal{E}_{A_1}(p)$ y un real $t \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s|_U = f|_U$ para $s \geq t$.

Se tienen todas las propiedades functoriales que cabía esperar:

Proposición 3.6. Sean $\mathbf{F} : N_1 \rightarrow N_2$ y $\mathbf{G} : N_2 \rightarrow N_3$ homotopías aproximativas. Supongamos que $\mathbf{F}_\infty|_{A_1} = f$ y $\mathbf{G}_\infty|_{A_2} = g$ para ciertas aplicaciones continuas f y g tales que $f(A_1) \subseteq A_2$. Entonces $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})_\infty|_{A_1} = g \circ f$.

Demostración. Sea $p_1 \in A_1$. Como $\mathbf{G}_\infty|_{A_2} = g$ y $p_2 := f(p_1) \in A_2$, existen $U_2 \in \mathcal{E}_{A_2}(p_2)$ y un real $t_2 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{G}_s|_{U_2} = g|_{U_2}$ para todo $s \geq t_2$. Análogamente, como $\mathbf{F}_\infty|_{A_1} = f$, existen $U_1 \in \mathcal{E}_{A_1}(p_1)$ y un real $t_1 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s|_{U_1} = f|_{U_1}$ si $s \geq t_1$. Además, y puesto que $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow A_2$ es continua, puede elegirse U_1 lo suficientemente pequeño para que $f(U_1) \subseteq U_2$. Poniendo $t := \max\{t_1, t_2\}$ se tiene, para $s \geq t$, que

$$(G \circ F)_s|_{U_1} = G_s \circ F_s|_{U_1} = G_s \circ f|_{U_1} = g \circ f|_{U_1},$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el hecho de que $f(U_1) \subseteq U_2$. \square

La siguiente Proposición 3.7, que concluye esta sección, establece una útil relación entre las nociones introducidas en las Definiciones 3.2 y 3.5.

Proposición 3.7. Sean $\mathbf{F} : N_1 \rightarrow N_2$ una isotopía aproximativa y $A_1 \subseteq N_1$, $A_2 \subseteq N_2$ compactos. Supongamos que \mathbf{F} se estabiliza en $N_1 - A_1$ a f . Entonces

$$1. \mathbf{F}_\infty(A_1) = A_2 \Leftrightarrow \text{im}(f) \subseteq N_2 - A_2$$

y si se cumple cualquiera de las condiciones de (1), entonces

$$2. f \text{ es un homeomorfismo de } N_1 - A_1 \text{ en } N_2 - A_2 \text{ y } \mathbf{F}^{-1} \text{ se estabiliza a } f^{-1} \text{ en } N_2 - A_2.$$

Demostración. (1) Veamos en primer lugar la implicación (\Rightarrow) . Dado $p_1 \in N_1 - A_1$, como \mathbf{F} se estabiliza a f en $N_1 - A_1$ existe $t_1 \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s(p_1) = f(p_1)$ siempre que $s \geq t_1$. Ahora, $N_1 - \{p_1\}$ es un entorno de A_1 en N_1 , y como $\mathbf{F}_\infty^{-1}(A_2) \subseteq A_1$ por hipótesis, existen $t_2 \in [0, +\infty)$ y $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(A_2)$ tales que $\mathbf{F}_s^{-1}(U_2) \subseteq N_1 - \{p_1\}$ si $s \geq t_2$, o $p_1 \notin \mathbf{F}_s^{-1}(U_2)$. Tomando cualquier $s \geq \max\{t_1, t_2\}$ se tiene que $f(p_1) = \mathbf{F}_s(p_1) \notin \mathbf{F}_s \mathbf{F}_s^{-1}(U_2) = U_2$, lo que prueba que $f(p_1) \notin A_2$ e $\text{im}(f) \subseteq N_2 - A_2$.

Para establecer la implicación (\Leftarrow) será conveniente disponer del siguiente resultado auxiliar, que es una versión uniforme de la Definición 3.5. Puesto que lo utilizaremos con cierta frecuencia, no haremos mención explícita de este hecho cuando así suceda.

Proposición 3.8. Sea $\mathbf{F} : N_1 \rightarrow N_2$ una homotopía aproximativa. Supongamos que $\mathbf{F}_\infty|_{A_1} = f$, donde A_1 es un subconjunto compacto de N_1 . Entonces existe un real $t \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s|_{A_1} = f$ para $s \geq t$.

Demostración. Para cada $p_1 \in A_1$ sean $U_{p_1} \in \mathcal{E}_{A_1}(p_1)$ y $t_{p_1} \in [0, +\infty)$ un real tales que $\mathbf{F}_s|_{U_{p_1}} = f|_{U_{p_1}}$. Como $\mathcal{U} := \{U_{p_1} : p_1 \in A_1\}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto A_1 , existen $p_1^1, \dots, p_1^n \in A_1$ tales que $A_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{p_1^k}$. Tomando $t := \max_{1 \leq k \leq n} t_{p_1^k}$, se tiene trivialmente que para $s \geq t$ es $\mathbf{F}_s|_{A_1} = f$. \square

Continuando con la prueba de la implicación (\Leftarrow) de (1) en la Proposición 3.7, supongamos que $\text{im}(f) \subseteq N_2 - A_2$ y sea $U_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(A_1)$. Como el conjunto $N_1 - U_1$ es un compacto contenido en $N_1 - A_1$, existe $t \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s|_{N_1 - U_1} = f|_{N_1 - U_1}$ para $s \geq t$ y en particular $\mathbf{F}_s(N_1 - U_1) = f(N_1 - U_1)$. Por otro lado $\text{im}(f) \subseteq N_2 - A_2$, f es continua y $f(N_1 - U_1)$ es un compacto en N_2 disjunto con A_2 , luego poniendo $U_2 := N_2 - f(N_1 - U_1)$ se obtiene un entorno abierto de A_2 en N_2 tal que $\mathbf{F}_s(U_1) = N_2 - \mathbf{F}_s(N_1 - U_1) = N_2 - f(N_1 - U_1) = U_2$ para $s \geq t$. Esto implica que $\mathbf{F}_s^{-1}(U_2) = U_1$ para $s \geq t$ y prueba que $\mathbf{F}_\infty^{-1}(A_2) \subseteq A_1$.

(2) Queremos ahora ver que \mathbf{F}^{-1} se estabiliza a f^{-1} en $N_2 - A_2$, y en primer lugar demostraremos que f es inyectiva. En efecto, si se tiene $f(p_1) = f(q_1)$ para algunos $p_1, q_1 \in N_1 - A_1$, como $\{p_1, q_1\}$ es un compacto existe $t \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s|_{\{p_1, q_1\}} = f|_{\{p_1, q_1\}}$ si $s \geq t$. Pero entonces $\mathbf{F}_s(p_1) = \mathbf{F}_s(q_1)$, y esto implica (por ser \mathbf{F}_s homeomorfismo, puesto que \mathbf{F} es isotopía aproximativa) que $p_1 = q_1$. En consecuencia f es inyectiva.

Sea $p_2 \in N_2 - A_2$, y tomemos $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(A_2)$ y $V_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(p_2)$ tales que $U_2 \cap V_2 = \emptyset$. Pongamos además $V_1 := f^{-1}(V_2)$. Como $\mathbf{F}_\infty(A_1) \subseteq A_2$, existen $U_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(A_1)$ y $t_1 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s(U_1) \subseteq U_2$ si $s \geq t_1$. Así

$$V_2 \subseteq N_2 - U_2 \subseteq N_2 - \mathbf{F}_s(U_1) = \mathbf{F}_s(N_1 - U_1) \text{ para } s \geq t_1.$$

Ahora bien, $N_1 - U_1$ es un compacto contenido en $N_1 - A_1$, luego existe $t_2 \in [0, +\infty)$ tal que $f|_{N_1 - U_1} = \mathbf{F}_s|_{N_1 - U_1}$, y en particular $\mathbf{F}_s(N_1 - U_1) = f(N_1 - U_1)$. De aquí, si $s \geq t := \max\{t_1, t_2\}$ se tiene que $V_2 \subseteq \mathbf{F}_s(N_1 - U_1) = f(N_1 - U_1)$, lo que junto con la inyectividad de f probada más arriba implica que $V_1 \subseteq N_1 - U_1$. Pero entonces $f|_{V_1} = \mathbf{F}_s|_{V_1}$ si $s \geq t$, y así $f : V_1 \rightarrow V_2$ es un homeomorfismo con $(f|_{V_2})^{-1} = \mathbf{F}_s^{-1}|_{V_2}$. Esto prueba que \mathbf{F}^{-1} se estabiliza a f^{-1} en $N_2 - A_2$ y que este último es homeomorfismo. \square

3.2. st -equivalencias de flujos

Con las definiciones previas ya estamos en condiciones de introducir la noción de equivalencia de flujos que utilizaremos. Para justificar la Definición 3.9 supóngase por un momento que N es un bloque aislante para un compacto K . Obsérvese que la dinámica en K no es de nuestro interés, y en consecuencia tampoco en N^+ y N^- puesto que K es, respectivamente, un atractor uniforme y un repulsor uniforme en estos conjuntos. De mayor importancia es la dinámica alrededor de K , que queda capturada por el aspecto de las líneas de flujo en $N - (N^+ \cup N^-)$.

Definición 3.9. Una st -equivalencia de flujos entre dos bloques aislantes N_1 y N_2 es una isotopía aproximativa $\mathbf{F} : N_1 \rightarrow N_2$ tal que:

1. $\mathbf{F}_\infty(N_1^+) = N_2^+$ y $\mathbf{F}_\infty(N_1^-) = N_2^-$,
2. \mathbf{F}_∞ se estabiliza en $N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$ a una equivalencia de flujos

$$f : N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-) \rightarrow N_2 - (N_2^+ \cup N_2^-).$$

Es claro que, si $f : N_1 \longrightarrow N_2$ es una equivalencia de flujos, entonces $\mathbf{f} : N_1 \longrightarrow N_2$ es una st -equivalencia.

Proposición 3.10. *La inversa de una st -equivalencia es una st -equivalencia. La composición de st -equivalencias es una st -equivalencia.*

Demostración. Es trivial: la composición st -equivalencias lo es a su vez por las Proposiciones 3.3 y 3.6; que la inversa de una st -equivalencia también lo es se sigue de la Definición 3.9, la Proposición 3.7 aplicada a $A_1 := N_1^+ \cup N_1^-$, y de la parte (2) de la Proposición 3.3. \square

Definición 3.11. Sean K_1 y K_2 compactos invariantes aislados para sendos flujos continuos φ_1 y φ_2 en 3-variedades sin borde M_1 y M_2 . Diremos que φ_1 y φ_2 son *localmente st -equivalentes en torno a K_1 y K_2* si éstos poseen bloques aislantes N_1 y N_2 para los que existe una st -equivalencia $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$.

Es inmediato observar que “ser localmente st -equivalentes” es una relación de equivalencia. Por lo demás, el siguiente resultado recoge las propiedades básicas de las st -equivalencias.

Proposición 3.12. *Sea $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ una st -equivalencia de flujos entre dos bloques aislantes N_1 y N_2 para sendos compactos invariantes aislados K_1 y K_2 . Entonces:*

1. $\mathbf{F}_\infty|_{K_1} : K_1 \longrightarrow K_2$ es una equivalencia *shape*.
2. K_1 y K_2 tienen el mismo índice (homotópico) de Conley.

Demostración. (1) Puesto que $K_1 = N_1^+ \cap N_1^-$ y por definición deben ser $\mathbf{F}_\infty(N_1^+) \subseteq N_2^+$ y $\mathbf{F}_\infty(N_1^-) \subseteq N_2^-$, en virtud de la parte (1) de la Proposición 3.3 se tiene que

$$\mathbf{F}_\infty(K_1) = \mathbf{F}_\infty(N_1^+ \cap N_1^-) \subseteq N_2^+ \cap N_2^- = K_2.$$

De modo análogo se comprueba que $\mathbf{F}_\infty^{-1}(K_2) \subseteq K_1$. Así $\mathbf{F}_\infty(K_1) = K_2$ y por la Proposición 3.4 se concluye que $\mathbf{F}_\infty|_{K_1} : K_1 \longrightarrow K_2$ es una equivalencia *shape*.

(2) Será suficiente probar que existe $t \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s(N_1^s) = N_2^s$ siempre que $s \geq t$, porque entonces $\mathbf{F}_t : (N_1, N_1^s) \longrightarrow (N_2, N_2^s)$ será un homeomorfismo y esto implica que $h(K_1) = h(K_2)$. Sea $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(N_2^-)$ disjunto con N_2^e . Como $\mathbf{F}_\infty(N_1^-) \subseteq N_2^-$ por definición, existen $U_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(N_1^-)$ y $t_1 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s(U_1) \subseteq U_2$ si $s \geq t_1$. Pongamos $V_1 := U_1 \cap N_1^s$ y $A_1 := N_1^s - V_1$, que es un subconjunto compacto de $N_1^s - n_1^- \subseteq N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$. Puesto que \mathbf{F} se estabiliza a f en este último conjunto, existe $t_2 \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s|_{A_1} = f|_{A_1} : A_1 \longrightarrow f(A_1)$ siempre que $s \geq t_2$. Ahora, sean $s \geq t := \max\{t_1, t_2\}$ y $p \in N_1^s$. Si $p \in V_1$ entonces $\mathbf{F}_s(p) \in U_2$ y además, como $\mathbf{F}_s(\partial N_1) = \partial N_2$ por el teorema de invariancia del borde, es $\mathbf{F}_s(p) \in U_2 \cap \partial N_2 = U_2 \cap (N_2^s \cup N_2^e) = U_2 \cap N_2^s \subseteq N_2^s$ porque U_2 se eligió disjunto con N_2^e . Si $p \notin V_1$, entonces $\mathbf{F}_s(p) = f(p)$ y como f es equivalencia de flujos $f(p) \in N_2^s$. \square

La Definición 3.11 presenta una dificultad de orden práctico. Para comprobar si dos flujos son localmente st -equivalentes en torno a sendos compactos invariantes aislados K_1 y K_2 es necesario encontrar dos bloques aislantes apropiados para ellos, digamos N_1 y N_2 , y posteriormente tratar de establecer una st -equivalencia $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$. Es razonable plantear si puede proporcionarse algún criterio para elegir N_1 y N_2 de forma adecuada, y este es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.13. *Supongamos que K_1 y K_2 son compactos invariantes aislados para flujos continuos φ_1 y φ_2 en sendas variedades sin borde y de dimensión no mayor que 3. Supongamos que $\check{H}^k(K_1; \mathbb{Z}_2)$ y $\check{H}^k(K_2; \mathbb{Z}_2)$ finitamente generados si $k = 0, 1$. Entonces, son equivalentes:*

1. φ_1 y φ_2 son localmente st -equivalentes en torno a K_1 y K_2 .
2. Existen dos bloques aislantes regulares N_1 y N_2 de K_1 y K_2 respectivamente y una st -equivalencia de flujos $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$.
3. Para cualesquiera dos bloques aislantes regulares N_1 y N_2 de K_1 y K_2 respectivamente existe una st -equivalencia de flujos $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sean N_1 y N_2 bloques aislantes para K_1 y K_2 respectivamente tales que existe una st -equivalencia $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ entre ellos. Sea P_1 entorno regular de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$ (que existe es consecuencia del Corolario 1.14) y consideremos el conjunto

$$A_1 := \{p \in N_1 : \pi_1^e(p) \notin \text{int}(P_1)\},$$

que no es sino el complemento del interior del cilindro $[P_1, P'_1]$ dentro de N_1 . Es claro que A_1 es cerrado en N_1 , porque si $(p_k) \subseteq A_1$ converge a $p \in N_1$ se tiene $\pi_1^e(p_k) \in N_1^e - \text{int}(P_1)$, que es un compacto, y por tanto se puede suponer $\pi_1^e(p_k) \longrightarrow q \in N_1^e - \text{int}(P_1)$, de donde $\pi_1^e(p) = q$ y por tanto $p \in A_1$. Así A_1 es un compacto contenido en $N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$ y por tanto existe un $t \in [0, +\infty)$ tal que, para todo $s \geq t$, es $\mathbf{F}_s|_{A_1} : A_1 \longrightarrow \mathbf{F}_s(A_1)$ una equivalencia de flujos. Ahora, al igual que en la construcción del Teorema 1.2, existe un bloque aislante regular N_1^* para K_1 que cumple $[P_1, P'_1] \subseteq \text{int}(N_1^*)$. Pongamos $N_2^* := \mathbf{F}_t(N_1^*)$. Obsérvese que, como $N_1 - \text{int}(N_1^*) \subseteq N_1 - \text{int}([P_1, P'_1]) = A_1$, es $\mathbf{F}_s(N_1 - \text{int}(N_1^*)) = N_2 - \text{int}(N_2^*)$ independiente de $s \geq t$ y además $\mathbf{F}_s(N_1^*) = N_2^*$. Por tanto está bien definida la isotopía aproximativa $\mathbf{F}_s^* := \mathbf{F}_{s-t} : N_1^* \longrightarrow N_2^*$.

Es claro que N_2^* es entorno aislante de K_2 , porque contiene al cilindro $[P_2, P'_2]$, donde $P_2 = \mathbf{F}_t(P_1)$. Además, puesto que ser bloque aislante depende sólo de la incidencia de las trayectorias en el borde de N_2^* y \mathbf{F}_2^* es equivalencia de flujos en $N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$, se sigue que N_2^* es bloque aislante de K_2 porque N_1^* lo es de K_1 .

Por último, \mathbf{F}_∞ induce una equivalencia *shape* entre K_1 y K_2 , por la parte (1) de la Proposición 3.12 y así, si $i_1 : K_1 \longrightarrow N_1^*$ e $i_2 : K_2 \longrightarrow N_2^*$ denotan las inclusiones respectivas, es $\mathbf{F}_\infty \circ i_1 = i_2 \circ \mathbf{F}_\infty|_{K_1}$, de donde i_2 es una equivalencia *shape*, porque lo son los otros tres morfismos involucrados en la igualdad. En consecuencia N_2^* es bloque aislante regular de K_2 .

(2) \Rightarrow (3) Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.3 (unicidad de bloques aislantes regulares) y el hecho de que una equivalencia de flujos sea st -equivalencia de flujos.

(3) \Rightarrow (1) Es obvio. □

3.3. El índice local

Comenzamos en esta sección el desarrollo de las técnicas que permitirán, más adelante, enumerar y clasificar las posibles clases de st -equivalencia de flujos en torno a un compacto invariante con *shape* trivial (Teorema 3.40).

Definición 3.14. Sea K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M . Asumamos que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0, 1$ y sea N un bloque aislante regular de K . Llamaremos *índice local de K* , y lo denotaremos por $\ell(K)$, al tipo de homeomorfismo de $(\partial N, N^e)$.

Que la definición es correcta se sigue del Teorema 1.3. Además, es invariante por st -equivalencia:

Proposición 3.15. Sean K_1 y K_2 compactos invariantes aislados de tipo finito para sendos flujos continuos en 3-variedades. Si hay una st -equivalencia local de flujos en torno a K_1 y K_2 , entonces $\ell(K_1) = \ell(K_2)$.

Demostración. Sea $\mathbf{F} : N_1 \rightarrow N_2$ es una st -equivalencia entre bloques aislantes N_1 y N_2 para K_1 y K_2 , que podemos suponer regulares en virtud de la Proposición 3.13. En la demostración de la parte 3. de la Proposición 3.12 se estableció que existe $t \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s(N_1^e) = N_2^e$ si $s \geq t$; lo que junto con el teorema de invariancia del borde implica que $\mathbf{F}_s : (\partial N_1, N_1^e) \rightarrow (\partial N_2, N_2^e)$ es un homeomorfismo. En consecuencia $\ell(K_1) = \ell(K_2)$. \square

La razón para introducir el índice local, aparte de que proporciona un invariante más fino que el índice de Conley, radica esencialmente en que caracteriza la clase de st -equivalencia en torno a compactos invariantes aislados con *shape* trivial. En concreto, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.16. Sean K_1 y K_2 compactos invariantes aislados con *shape* trivial para sendos flujos continuos φ_1 y φ_2 en 3-variedades sin borde M_1 y M_2 . Hay una st -equivalencia local de flujos en torno a K_1 y K_2 si, y sólo si, $\ell(K_1) = \ell(K_2)$.

El Teorema 3.16 reduce una cuestión dinámica tridimensional (la existencia de una st -equivalencia) a una cuestión que se refiere a la partición de una superficie (el borde de un bloque aislante regular) en dos 2-variedades con borde (los conjuntos de entrada y salida). En la sección 3.5 abordaremos este problema, más sencillo, y presentaremos una solución combinatoria al mismo.

La implicación (\Rightarrow) del Teorema 3.16 está contenida en la Proposición 3.15, y dedicaremos el resto de esta sección a probar (\Leftarrow) . Comenzaremos con un resultado que nos permitirá reducir el problema al caso en que K_1 y K_2 son puntos.

Proposición 3.17. Sea K un compacto invariante aislado con *shape* trivial para un flujo continuo φ en una 3-variedad sin borde M , y denotemos $\overline{\varphi}$ el flujo inducido en la variedad cociente M/K . Entonces φ y $\overline{\varphi}$ son localmente st -equivalentes en torno a K y $\{[K]\}$.

Que M/K es ciertamente 3-variedad se sigue de la Proposición 2.4, que garantiza que K es celular en M , y de la parte 2. del Lema 2.5.

Demostración. Sea $(N_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base decreciente de bloques aislantes regulares de K en M , que son todos bolas en virtud del Lema 2.1. Si denotamos $\pi : M \rightarrow M/K$ la proyección canónica y ponemos $N_2^k := \pi(N_1^k)$, es claro que $(N_2^k)_{k \in \mathbb{N}}$ constituye asimismo una base de bloques aislantes de $[K]$ puesto que $\pi|_{N_1^k - K} : N_1^k - K \rightarrow N_2^k - \{[K]\}$ es una equivalencia de flujos. Como K es celular por la Proposición 2.4,

se sigue de la parte 2. del Lema 2.5 que cada N_2^k es una bola también, y en particular bloque aislante regular de $\{[K]\}$. Por comodidad denotaremos $N_1 := N_1^1$ y $N_2 := N_2^1$.

Llegados a este punto, necesitaremos el siguiente Lema 3.18 (el “truco de Alexander”), cuya demostración incluimos aquí para comodidad del lector, aunque es estándar. Seguimos el argumento de [65].

Lema 3.18. Sean B_1 y B_2 dos n -celdas.

1. Cualquier homeomorfismo $g : \partial B_1 \longrightarrow \partial B_2$ admite una extensión a un homeomorfismo $\widehat{g} : B_1 \longrightarrow B_2$.
2. Si dos homeomorfismos $f_0, f_1 : B_1 \longrightarrow B_2$ verifican que $f_0|_{\partial B_1} = f_1|_{\partial B_1}$, existe una isotopía $F : B_1 \times [0, 1] \longrightarrow B_2$ tal que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$ y $F_t|_{\partial B_1} = f_0|_{\partial B_1} = f_1|_{\partial B_1}$ para todo $t \in [0, 1]$.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $B_1 = B_2 = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$ son las bolas euclídeas en \mathbb{R}^n .

- (1) Basta poner $\widehat{g}(0) := 0$ y, para cada $p \in B_1 - \{0\}$, definir

$$\widehat{g}(p) := g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) \|p\|.$$

(2) Obsérvese primero que tanto $B_1 \times [0, 1]$ como $B_2 \times [0, 1]$ son $(n + 1)$ -bolas, con bordes $B_1 \times \{0\} \cup B_1 \times \{1\} \cup \partial B_1 \times [0, 1]$ y $B_2 \times \{0\} \cup B_2 \times \{1\} \cup \partial B_2 \times [0, 1]$ respectivamente. Empezamos definiendo un homeomorfismo $H : \partial(B_1 \times [0, 1]) \longrightarrow \partial(B_2 \times [0, 1])$ como sigue:

$$H(p, t) := \begin{cases} (f_0(p), 0) & \text{si } t = 0, \\ (f_1(p), 1) & \text{si } t = 1, \\ (f_0(p), t) & \text{si } p \in \partial B_1. \end{cases}$$

Ahora se puede extender H a un homeomorfismo \widehat{H} entre las bolas $B_1 \times [0, 1]$ y $B_2 \times [0, 1]$ en virtud de la parte (1). Sólo resta poner $F := \pi \circ \widehat{H}$, donde $\pi : B_2 \times [0, 1] \longrightarrow B_2$ es la proyección en la primera coordenada. \square

Continuaremos ahora con la demostración de la Proposición. Es obvio que para cada $k \in \mathbb{N}$ la restricción $\pi|_{\partial N_1^k} : \partial N_1^k \longrightarrow \partial N_2^k$ es un homeomorfismo que, por el Lema 3.18, podemos extender a otro homeomorfismo $f^k : N_1^k \longrightarrow N_2^k$. Haciendo $\widehat{f}^k(p) := \pi(p)$ para $p \in N_1 - N_1^k$, se obtiene una colección de homeomorfismos $(\widehat{f}^k)_{k \in \mathbb{N}} : N_1 \longrightarrow N_2$ tal que $f^k(N_1^k) = N_2^k$ y $f^k(p) = \pi(p)$ para todo $p \notin \text{int}(N_1^k)$.

Obsérvese ahora que $\widehat{f}^k|_{\partial N_1^k} = \pi|_{\partial N_1^k} = \widehat{f}^{k+1}|_{\partial N_1^k}$ de modo que, por el Lema 3.18, existe una isotopía $F_t^k : N_1^k \longrightarrow N_2^k$ tal que $F_0^k = f^k$ y $F_1^k = f^{k+1}$. Extendamos F_t^k a todo N_1 , al igual que hicimos antes, poniendo $\widehat{F}_t^k(p) := \pi(p)$ si $p \notin \text{int}(N_1^k)$. Finalmente, reunamos todas las isotopías F_t^k en una única isotopía aproximativa $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ definiendo $\mathbf{F}_t|_{[k, k+1]} := \widehat{F}_{t-k}^k$. Afirmamos que \mathbf{F} es una st -equivalencia de flujos entre N_1 y N_2 , y la prueba de este hecho la haremos depender del siguiente

Lema 3.19. Sea $\mathbf{F} : N_1 \longrightarrow N_2$ una isotopía aproximativa entre bloques aislantes para K_1 y K_2 . Supongamos que $\mathbf{F}_\infty(K_1) \subseteq K_2$ y que \mathbf{F} se estabiliza a una aplicación de flujos $f : N_1 - K_1 \longrightarrow N_2 - K_2$. Entonces \mathbf{F} es una st -equivalencia de flujos.

Demostración. (1) Probemos que $\mathbf{F}_\infty(N_1^+) \subseteq N_2^+$, y por un argumento análogo se seguirá que $\mathbf{F}_\infty(N_1^-) \subseteq N_2^-$. Sea $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(N_2^+)$. Como U_2 es en particular entorno de K_2 , la hipótesis $\mathbf{F}_\infty(K_1) \subseteq K_2$ implica que existen $V_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(K_1)$ y $t_1 \in [0, +\infty)$ tales que $\mathbf{F}_s(V_1) \subseteq U_2$ si $s \geq t_1$. Ahora $N_1 - V_1$ es un subconjunto compacto de $N_1 - K_1$, y como \mathbf{F} se estabiliza a f en $N_1 - K_1$, por la Proposición 3.8 existe $t_2 \in [0, +\infty)$ tal que $\mathbf{F}_s|_{N_1 - V_1} = f|_{N_1 - V_1}$ si $s \geq t_2$. Puesto que $f(N_1 - V_1)$ es un subconjunto compacto de $N_2 - K_2$, su complemento $V_2 := N_2 - f(N_1 - V_1)$ es un entorno de K_2 en N_2 , y además para $s \geq t_2$ es $N_2 - V_2 = f(N_1 - V_1) = \mathbf{F}_s(N_1 - V_1) = N_2 - \mathbf{F}_s(V_1)$, o también $\mathbf{F}_s(V_1) = V_2$.

Ahora $f(N_1^+ - V_1) = N_2^+ - V_2$ puesto que $N_1^+ - V_1 = (N_1^+ - K_1) \cap (N_1 - V_1)$ y f transforma el primero de los conjuntos en $N_2^+ - K_2$ porque es equivalencia de flujos. Como $N_1^+ - V_1$ es compacto, $f(N_1^+ - V_1) = N_2^+ - V_2 \subseteq U_2$ y f es continua, existe un entorno abierto U_1^* de $N_1^+ - V_1$ en N_1 tal que $f(U_1^*) \subseteq U_2$, y así $\mathbf{F}_2(U_1^*) \subseteq U_2$ para todo $s \geq t_2$. Finalmente, sea $U_1 := V_1 \cup U_1^*$, que es un entorno abierto de N_1^+ en N_1 . Si $s \geq \max\{t_1, t_2\}$ entonces $\mathbf{F}_s(U_1) = \mathbf{F}_s(V_1) \cup \mathbf{F}_s(U_1^*) \subseteq U_2$.

(2) Falta comprobar que $\mathbf{F}_\infty^{-1}(N_2^+) \subseteq N_1^+$ y $\mathbf{F}_\infty^{-1}(N_2^-) \subseteq N_1^-$. Será suficiente demostrar que $\mathbf{F}_\infty^{-1}(K_2) \subseteq K_1$ y que \mathbf{F}^{-1} se estabiliza en $N_2 - K_2$ a una equivalencia de flujos, porque entonces el argumento del apartado (1) aplicado a \mathbf{F}^{-1} completará la prueba. Pero esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.7 y el hecho de que la inversa de una equivalencia de flujos es también una equivalencia de flujos. \square

Para completar la demostración de la Proposición 3.17 sólo hace falta observar que $\mathbf{F}_\infty(K) \subseteq \{[K]\}$ y que \mathbf{F} se estabiliza en $N_1 - K$ a $\pi : N_1 - K \longrightarrow N_2 - \{[K]\}$, que es equivalencia de flujos, porque entonces se aplica el Lema 3.19. Pero esto es fácil. Por un lado, dado cualquier entorno U_2 de $[K]$ en N_2 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_2^k \subseteq U_2$, y por tanto $\mathbf{F}_s(N_1^k) = N_2^k \subseteq U_2$ siempre que $s \geq k$. Esto prueba que $\mathbf{F}_\infty(K) \subseteq \{[K]\}$. Por otro lado, para cualquier $p_1 \in N_1 - K_1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_1 \notin N_1^k$, y así $U_1 := N_1 - N_1^k$ es un entorno abierto de p_1 en N_1 tal que $\mathbf{F}_s|_{U_1} = \pi|_{U_1}$ siempre que $s \geq k$. Así \mathbf{F} se estabiliza a π en $N_1 - K$. \square

Observación 3.20. Con las hipótesis y la notación del Teorema 3.16, por la Proposición 3.17 φ_1 es localmente st-equivalente a $\overline{\varphi}_1$ en torno a $K_1 \subseteq M_1$ y $[K_1] \subseteq M_1/K_1$, y análogamente φ_2 es localmente st-equivalente a $\overline{\varphi}_2$ en torno a $K_2 \subseteq M_2$ y $[K_2] \subseteq M_2/K_2$. Para probar la implicación (\Leftarrow) del Teorema 3.16 será suficiente, por tanto, establecer que los flujos $\overline{\varphi}_1$ y $\overline{\varphi}_2$ son localmente st-equivalentes entre sí en torno a $[K_1]$ y $[K_2]$.

Todavía necesitamos un resultado auxiliar más. Se sabe que, por definición, si $\ell(K_1) = \ell(K_2)$ entonces existen bloques aislantes N_1 y N_2 de K_1 y K_2 respectivamente tales hay un homeomorfismo $h : (\partial N_1, N_1^e) \longrightarrow (\partial N_2, N_2^e)$. La siguiente Proposición 3.21 nos permite sustituir h por una isotopía aproximativa \mathbf{F} que posee ciertas propiedades convenientes. Más precisamente,

Proposición 3.21. Supongamos que $\ell(K_1) = \ell(K_2)$, y sean N_1 y N_2 dos bloques aislantes regulares de K_1 y K_2 respectivamente. Entonces existe una isotopía aproximativa $\mathbf{F} : \partial N_1 \longrightarrow \partial N_2$ tal que:

1. $\mathbf{F}_\infty|_{n_1^+} : n_1^+ \longrightarrow n_2^+$ y $\mathbf{F}_\infty|_{n_1^-} : n_1^- \longrightarrow n_2^-$ son equivalencias shape,

2. \mathbf{F} se estabiliza a sendos homeomorfismos

$$f^+ : N_1^e - n_1^+ \longrightarrow N_2^e - n_2^+ \text{ y } f^- : N_1^s - n_2^- \longrightarrow N_2^s - n_2^-$$

tales que $f^+(p)' = f^-(p')$ para todo $p \in N_1^e - n_1^+$.

Demostración. Puesto que K_1 y K_2 tienen *shape* trivial, n_1^+ y n_2^+ tienen cohomología de Čech finitamente generada (Corolario 1.14) y por tanto existen P_1 y P_2 entornos regulares de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$ y n_2^+ en $\text{int}(N_2^e)$ respectivamente. Denotemos $D_1 := \partial N_1^e = \partial N_1^s$ y $D_2 := \partial N_2^e = \partial N_2^s$ y sea $h : (\partial N_1, N_1^e) \longrightarrow (\partial N_2, N_2^e)$ un homeomorfismo, que debe existir por hipótesis y la Proposición 3.13.

Aserto 1. Existe una isotopía $I_t : \partial N_1 \longrightarrow \partial N_2$ relativa a D_1 tal que (i.) $I_0 = h$, (ii.) $I_1(P_1) = P_2$ y (ii'.) $I_1(P_1') = P_2'$.

Prueba. Puesto que las inclusiones $n_1^+ \subseteq P_1 \subseteq N_1^e$ son todas equivalencias *shape*, se sigue del Lema B.5 que hay un homeomorfismo $h : A_1 := N_1^e - \text{int}(P_1) \longrightarrow D_1 \times [0, 1]$ tal que $h(p) = (p, 0)$ para todo $p \in D_1$. Ahora se puede transportar h , mediante la dualidad $'$, para dar un homeomorfismo $h' : A_1' := N_1^s - \text{int}(P_1') \longrightarrow D_1 \times [0, 1]$ con $h'(p) = p$ para todo $p \in D_1$. Como $'$ deja fijos los puntos de D_1 , ambos homeomorfismos pueden pegarse para concluir que $A_1 \cup A_1'$ es un entorno regular de D_1 en ∂N_1 .

Con un argumento completamente análogo se comprueba que, denotando $A_2 := N_2^e - \text{int}(P_2)$ y $A_2' := N_2^s - \text{int}(P_2')$, la unión $A_2 \cup A_2'$ es un entorno regular de D_2 en ∂N_2 . Por tanto $h^{-1}(A_2 \cup A_2')$ es un entorno regular de $h^{-1}(D_2) = D_1$ en ∂N_1 , y por la unicidad de los mismos (Teorema B.7) existe una isotopía $G_t : N_1 \longrightarrow N_1$ relativa a D_1 tal que $G_0 = \text{id}$ y $G_1(A_1 \cup A_1') = h^{-1}(A_2 \cup A_2')$. Así, $I_t := h \circ G_t : N_1 \longrightarrow N_2$ es una isotopía relativa a D_1 y tal que $I_0 = h$ y $I_1(A_1 \cup A_1') = A_2 \cup A_2'$ o también, tomando complementarios, $I_1(P_1 \cup P_1') = P_2 \cup P_2'$. Finalmente, observando que D_1 separa P_1 y P_1' , se concluye que necesariamente $I_1(P_1) = P_2$ y $I_1(P_1') = P_2'$.

Aserto 2. Con la notación del Aserto 1., puede conseguirse que la isotopía I_t allí construida satisfaga además $I_1(p') = I_1(p)'$ para todo $p \in A_1 \cup A_1'$.

Prueba. Considérense la restricción $I_1|_{A_1} : A_1 \longrightarrow A_2$ y la aplicación $f_1^+ : A_1 \longrightarrow A_2$ definida por $f_1^+(p) := I_1(p)'$. Si $p \in D_1$, entonces $f_1^+(p) = h(p)$ porque $'$ es la identidad en D_1 y D_2 y I_1 lleva D_1 en D_2 . En definitiva, $I_1|_{D_1} = f_1^+|_{D_1} = h|_{D_1}$.

Puesto que A_1 y A_2 son uniones de anillos, por [44, p. 526] (véase también [43, Lemma 2.2., p. 213]) hay una isotopía $J_t : A_1 \longrightarrow A_2$ relativa a D_1 tal que $J_0 = I_1|_{A_1}$ y $J_1 = f_1^+$. Ahora, por un argumento análogo al de [65, 3.22 Proposition.(ii), p. 37] la restricción $J_t|_{\partial P_1} : \partial P_1 \longrightarrow \partial P_2$ puede extenderse a una isotopía $\hat{J}_t : P_1 \longrightarrow P_2$ tal que $\hat{J}_0 = I_1|_{P_1}$ (esencialmente, utilizando un collar interior de ∂P_1 en P_1 para absorber la isotopía H_t). Volveremos a denotar $\hat{J}_t : N_1^e \longrightarrow N_2^e$ la isotopía unión de J_t y \hat{J}_t , que por tanto es relativa a D_1 y satisface $\hat{J}_0 = I_1$, $\hat{J}_1|_{A_1} = f_1^+$ y $\hat{J}_1(P_1) = P_2$ para todo t .

Finalmente, como $\hat{J}_t|_{D_1} = h|_{D_1} = I_1|_{D_1}$, la unión $F_t := J_t \cup I_1|_{N_1^s} : \partial N_1 \longrightarrow \partial N_2$ define bien una isotopía relativa a D_1 que comienza en $F_0 = J_0 \cup I_1|_{N_1^s} = I_1$. Además, si $p \in A_1$ se tiene por un lado que $F_1(p') = I_1(p')$ (porque $p' \in N_1^s$) y por otro que $F_1(p)' = J_1(p)' = (f_1^+(p))' = I_1(p')$, de donde $F_1(p)' = F_1(p')$ (y análogamente para puntos $p \in A_1'$). Todo esto implica que la isotopía I_t , seguida de F_t , cumple las condiciones requeridas por el enunciado del Aserto.

Los dos Asertos anteriores contienen la técnica básica que nos permitirá completar la prueba de la proposición de manera inductiva, lo que describimos de manera informal

a continuación. Sean $(Q_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(Q_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ bases decrecientes de entornos regulares de n_1^+ y n_2^+ en $\text{int}(N_1^e)$ y $\text{int}(N_2^e)$ respectivamente. Para $k = 0$ sea $I_t^0 : \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$ una isotopía con las propiedades que cita el Aserto 2., donde $P_1 = Q_{1,1}$ y $P_2 = Q_{2,1}$. Ahora, para $k = 1$, puede volver a aplicarse la construcción de los Asertos 1. y 2., pero ahora sustituyendo N_1^e , N_1^s , N_2^e y N_2^s por $Q_{1,1}$, $Q'_{1,1}$, $Q_{2,1}$ y $Q'_{2,1}$ respectivamente, P_1 y P_2 por $Q_{1,2}$ y $Q_{2,2}$ y h por I_1^0 . Reiterando el proceso de la manera obvia y colocando las isotopías I_t^k así obtenidas una detrás de otra se obtiene la isotopía aproximativa \mathbf{F} requerida. \square

Estamos ya en condiciones de completar la demostración del Teorema 3.16.

Demostración. Mantenemos la notación de la Observación 3.20. Por la Proposición 3.15 se tiene que $\ell([K_1]) = \ell([K_2])$, y aplicando las Proposiciones 3.13 y 3.21 existe una isotopía aproximativa $\mathbf{F} : \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$, donde N_1 y N_2 son bloques aislantes regulares de $[K_1]$ y $[K_2]$ en M_1/K_1 y M_2/K_2 respectivamente, que cumple $\mathbf{F}_\infty(n_1^+) = n_2^+$ y se estabiliza en $N_1^e - n_1^+$ y $N_1^s - n_1^-$ a homeomorfismos f^+ y f^- sobre $N_2^e - n_2^+$ y $N_2^s - n_2^-$ que además son compatibles con la dualidad.

Elijamos un entorno regular P_1 de n_1^+ en $\text{int}(N_1^e)$. Como $A_1 := N_1^e - \text{int}(P_1)$ es un compacto contenido en $N_1^e - n_1^+$ y \mathbf{F} se estabiliza a f^+ allí, con una traslación del origen de tiempos en la isotopía \mathbf{F}_t podemos suponer que $\mathbf{F}_t|_{A_1} = f^+|_{A_1}$ para todo $t \geq 0$. Pongamos $A_2 := \mathbf{F}_t(A_1)$ y así $P_2 := N_2^e - \text{int}(A_2) = \mathbf{F}_t(N_1^e) - \mathbf{F}_t(\text{int}(A_1)) = \mathbf{F}_t(P_1)$.

Considérese la siguiente extensión de \mathbf{F} a $\widehat{\mathbf{F}}_t : [P_1, P_1']^{\geq 0} \rightarrow [P_2, P_2']^{\geq 0}$:

$$\widehat{\mathbf{F}}_t(p) = \begin{cases} \langle \mathbf{F}_{u^{-1}+t-1}(q), u \rangle & \text{si } p = \langle q, u \rangle \text{ con } 0 < u \leq 1, \\ \langle f^+(q), 0 \rangle & \text{si } p = \langle q, 0 \rangle, \\ [K_2] & \text{si } p = [K_1]. \end{cases}$$

Aquí se entiende que $p = \langle q, u \rangle$ es la expresión de p en coordenadas cilíndricas con $q \in N_1^e$ y $u \geq 0$. Está bien definida porque $\mathbf{F}_{u^{-1}+t-1}(q) \in P_2$ si $q \in P_1$ por construcción, lo que prueba que la expresión de $\widehat{\mathbf{F}}_t(p)$ tiene sentido si $u > 0$, y $f^+(q)$ está definido y no pertenece a n_2^+ para $q \notin n_1^+$, de modo que también tiene sentido la expresión de $\widehat{\mathbf{F}}_t(p)$ para el caso $u = 0$. Además es claro que lleva puntos de $[P_1, P_1']^{\geq 0}$ en puntos de $[P_2, P_2']^{\geq 0}$, porque preserva el signo de u . Finalmente, es inmediato comprobar que

$$\widehat{\mathbf{F}}_t^{-1}(p) = \begin{cases} \langle \mathbf{F}_{u^{-1}+t-1}^{-1}(q), u \rangle & \text{si } p = \langle q, u \rangle \text{ con } 0 < u \leq 1, \\ \langle (f^+)^{-1}(q), 0 \rangle & \text{si } p = \langle q, 0 \rangle, \\ [K_1] & \text{si } p = [K_2]. \end{cases}$$

es la inversa de $\widehat{\mathbf{F}}_t$. De modo completamente análogo a como acabamos de hacer se ve que existe también una extensión biyectiva $\widehat{\mathbf{F}}_t : [P_1, P_1']^{\leq 0} \rightarrow [P_2, P_2']^{\leq 0}$ de \mathbf{F} al semicilindro inferior, dada por

$$\widehat{\mathbf{F}}_t(p) = \begin{cases} \langle \mathbf{F}_{-u^{-1}+t-1}(q), u \rangle & \text{si } p = \langle q, u \rangle \text{ con } -1 \leq u < 0, \\ \langle f^-(q), 0 \rangle & \text{si } p = \langle q, 0 \rangle, \\ [K_2] & \text{si } p = [K_1], \end{cases}$$

donde ahora $p = \langle q, u \rangle$ es la expresión de p en coordenadas cilíndricas con $q \in N_1^s$ y $u \leq 0$. Además, si $p \in [P_1, P_1']^{\geq 0} \cap [P_1, P_1']^{\leq 0}$, o bien $p = [K_1]$ y entonces trivialmente ambas extensiones coinciden en p (pues le asignan el valor $[K_2]$) o bien admite las dos representaciones $p = \langle q, 0 \rangle$ y $p = \langle q', 0 \rangle$ con $q \in N_1^e$ pero, como $f^+(q)' = f^-(q')$ por

construcción, $\langle f^+(q), 0 \rangle = \langle f^-(q'), 0 \rangle$. Esto prueba que ambas extensiones coinciden en la intersección de los semicilindros superior e inferior y por tanto definen bien una aplicación de $[P_1, P'_1]$ en $[P_2, P'_2]$.

Vamos a demostrar que $\widehat{\mathbf{F}}_t$ es isotopía aproximativa, empezando por su continuidad. Lo haremos sólo para los puntos (t, p) con $p \in [P_1, P'_1]^{\geq 0}$ puesto que para el semicilindro inferior es análogo. Comenzamos con los puntos de la forma $(t, [K_1])$. Tomemos una sucesión $p_k = \langle q_k, u_k \rangle \rightarrow [K_1]$ (puesto que trabajamos con el semicilindro superior, $q_k \in P_1$ y $u_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Deberá ser $q_k \rightarrow n_1^+$ y $u_k \rightarrow 0$. Supongamos primero que $u_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Puesto que entonces $u_k^{-1} + t_k - 1 \rightarrow +\infty$, y además $q_k \rightarrow n_1^+$, la condición $\mathbf{F}_\infty(n_1^+) \subseteq n_2^+$ implica que $\mathbf{F}_{u_k^{-1}+t_k-1}(q_k) \rightarrow n_2^+$. Por lo tanto

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t_k}(p_k) = \langle \mathbf{F}_{u_k^{-1}+t_k-1}(q_k), u_k \rangle \rightarrow [K_2] = \widehat{\mathbf{F}}_t([K_1]).$$

Si fuese $u_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, puesto que $q_k \rightarrow n_1^+$ y por tanto abandona cualquier compacto de $N_1^e - n_1^+$, como f^+ es una aplicación propia por ser homeomorfismo, se sigue que también $f^+(q_k)$ abandona cualquier compacto de $N_2^e - n_2^+$ y por tanto $f^+(q_k) \rightarrow n_2^+$. Así

$$\widehat{\mathbf{F}}_t(p_k) = \langle f^+(q_k), 0 \rangle \rightarrow [K_2] = \widehat{\mathbf{F}}_t([K_1]).$$

El caso general, en que la sucesión (u_k) presenta términos estrictamente positivos y términos nulos, se trata separando (u_k) en dos subsucesiones y aplicando los dos argumentos anteriores.

Consideremos ahora la situación en torno a puntos del tipo (t, p) con $p \neq [K_1]$. Entonces p tiene una expresión del tipo $p = \langle q, u \rangle$, y si $p_k = \langle q_k, u_k \rangle \rightarrow p = \langle q, u \rangle$ se tiene que $q_k \rightarrow q$ y $u_k \rightarrow u$, con $u \geq 0$. Si fuese $u > 0$ entonces $u_k > 0$ para k suficientemente grande y además $u_k^{-1} + t_k - 1 \rightarrow u^{-1} + t - 1$ luego por la continuidad de \mathbf{F} es

$$\mathbf{F}_{u_k^{-1}+t_k-1}(q_k) \rightarrow \mathbf{F}_{u^{-1}+t-1}(q),$$

de donde se concluye que

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t_k}(p_k) = \langle \mathbf{F}_{u_k^{-1}+t_k-1}(q_k), u_k \rangle \rightarrow \langle \mathbf{F}_{u^{-1}+t-1}(q), u \rangle = \widehat{\mathbf{F}}_t(p).$$

Finalmente, supongamos que $u = 0$, de modo que $q \in N_1^e - n_1^+$ para que la expresión $p = \langle q, u \rangle$ tenga sentido. Analicemos primero el caso en que $u_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como \mathbf{F} se estabiliza a f^+ en $N_1^e - n_1^+$, existen $s \in [0, +\infty)$ y U entorno de q en $N_1^e - n_1^+$ tales que $\mathbf{F}_r|_U = f^+|_U$ si $r \geq s$. Tomemos k_0 lo suficientemente grande como para que $q_k \in U$ y $u_k^{-1} + t_k - 1 \geq s$ siempre que $k \geq k_0$ (esto último es posible porque $u_k^{-1} + t_k - 1 \rightarrow +\infty$ ya que $u_k \rightarrow 0$). Entonces, para $k \geq k_0$, se tiene

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t_k}(p_k) = \langle \mathbf{F}_{u_k^{-1}+t_k-1}(q_k), u_k \rangle = \langle f^+(q_k), u_k \rangle \rightarrow \langle f^+(q), 0 \rangle = \widehat{\mathbf{F}}_t(p).$$

Si fuese $u_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, como $q_k \rightarrow q \notin n_1^+$, se tiene trivialmente

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t_k}(p_k) = \langle f^+(q_k), 0 \rangle \rightarrow \langle f^+(q), 0 \rangle = \widehat{\mathbf{F}}_t(p).$$

Al igual que ya sucedió más arriba el caso general para sucesiones (u_k) arbitrarias se trata separándola en dos subsucesiones y aplicando los dos argumentos anteriores.

Veamos ahora que $\widehat{\mathbf{F}}$ se estabiliza a la aplicación $\widehat{f} : [P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-) \longrightarrow [P_2, P'_2] - (N_2^+ \cup N_2^-)$ dada por

$$\widehat{f}(p) := \langle f^+(q), u \rangle \text{ si } p = \langle q, u \rangle \text{ con } q \in P_1 - n_1^+.$$

Es claro que $\text{im}(\widehat{f}) \subseteq [P_2, P'_2] - (N_2^+ \cup N_2^-)$, porque $\text{im}(f^+) \subseteq P_2 - n_2^+$. Fijado $q_0 \in P_1 - n_1^+$, tomemos $t \in [0, +\infty)$ y un entorno abierto U_1 de q_0 en $P_1 - n_1^+$ tales que $\mathbf{F}_s|_{U_1} = f^+|_{U_1}$; esto es posible porque \mathbf{F} se estabiliza a f^+ en $N_1^e - n_1^+$. Entonces, si $p \in V_1 := (\pi_1^e|_{[P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)})^{-1}$, que es un abierto de $[P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)$ porque π_1^e es continua, se tiene que $p = \langle q, u \rangle$ con $q \in U_1$ y por definición de $\widehat{\mathbf{F}}$ es

$$\widehat{\mathbf{F}}_s(p) = \langle f^+(q), u \rangle = \widehat{f}(p)$$

(con independencia del valor de u). Por tanto $\widehat{\mathbf{F}}$ se estabiliza a \widehat{f} en $[P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)$.

Además \widehat{f} es una equivalencia de flujos. Para $p \in [P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)$ su segmento en $[P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)$ es $\{\langle q, u \rangle : 1 \geq u \geq -1\}$, donde $q := \pi_1^e(p)$, y así \widehat{f} lo lleva (preservando su orientación) de manera homeomórfica en $\{\langle f^+(q), u \rangle : 1 \geq u \geq -1\}$, que es el segmento de $\widehat{f}(p)$ en $[P_2, P'_2] - (N_2^+ \cup N_2^-)$.

Como $p \in [\partial P_1, \partial P'_1]$ (la cara lateral del cilindro $[P_1, P'_1]$) es un compacto contenido en $[P_1, P'_1] - (N_1^+ \cup N_1^-)$, existe $t \in [0, +\infty)$ tal que $\widehat{\mathbf{F}}_s|_{[\partial P_1, \partial P'_1]} = \widehat{f}|_{[\partial P_1, \partial P'_1]}$ si $s \geq t$, supondremos sin pérdida de generalidad que $t = 0$. Ahora se aplica la Observación 1.22 para extender $\widehat{f}|_{[\partial P_1, \partial P'_1]}$ a una equivalencia de flujos, que volvemos a llamar \widehat{f} , de $N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1])$ en $N_2 - \text{int}_{N_2}([P_2, P'_2])$. Así queda extendido también $\widehat{\mathbf{F}}_t : N_1 \longrightarrow N_2$ poniendo $\widehat{\mathbf{F}}_t(p) = \widehat{f}(p)$ si $p \in N_1 - \text{int}_{N_1}([P_1, P'_1])$ y para cualquier $t \geq 0$. Claramente fuera de $N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$ la aplicación $\widehat{\mathbf{F}}$ se estabiliza a \widehat{f} .

Para probar que $\widehat{\mathbf{F}}_\infty(N_1^+) = N_2^+$ y $\widehat{\mathbf{F}}_\infty(N_1^-) = N_2^-$, completando así la demostración de que $\widehat{\mathbf{F}}$ es una st -equivalencia (y por tanto la del Teorema 3.16), sólo será necesario ver que $\widehat{\mathbf{F}}_\infty(N_1^+) \subseteq N_2^+$. El otro contenido se sigue de forma análoga, pues la expresión para $\widehat{\mathbf{F}}^{-1}$ es totalmente simétrica a la de $\widehat{\mathbf{F}}$, y el argumento para N_1^- es el mismo.

Sea $U_2 \in \mathcal{E}_{N_2}(N_2^+)$, que supondremos sin pérdida de generalidad que está contenido en $[P_2, P'_2]$ porque este último es un entorno de $N_2^+ \cup N_2^-$ en N_2 . El conjunto $B_2 := N_2^- - U_2$ es un compacto contenido en N_2^- disjunto con K_2 , por lo que $u|_{B_2} < 0$ (nótese que empleamos la letra u para denotar las funciones altura tanto de N_1 como de N_2 ; esto no deberá causar confusión) y por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $u|_{B_2} < -\varepsilon < 0$. Además, existe un entorno V_2 de B_2 en N_2 , que podemos suponer contenido en $[P_2, P'_2]$, tal que $u|_{V_2} \leq -\varepsilon < 0$. Sea $W_2 := U_2 \cup V_2$, que es un entorno de $N_2^+ \cup N_2^-$ en N_2 . Como $\widehat{\mathbf{F}}$ se estabiliza en $N_1 - (N_1^+ \cup N_1^-)$ a una aplicación \widehat{f} cuya imagen está contenida en $N_2 - (N_2^+ \cup N_2^-)$, la Proposición 3.7 implica que $\widehat{\mathbf{F}}_\infty(N_1^+ \cup N_1^-) \subseteq N_2^+ \cup N_2^-$, por lo que existen $W_1 \in \mathcal{E}_{N_1}(N_1^+ \cup N_1^-)$ y $t \in [0, +\infty)$ tales que $\widehat{\mathbf{F}}_s(W_1) \subseteq W_2$ si $s \geq t$. Pongamos

$$U_1 := W_1 \cap \{p \in [P_1, P'_1] : u(p) > -\varepsilon\},$$

que es un entorno (por ser intersección de abiertos) de N_1^+ en N_1 . Puesto que $\widehat{\mathbf{F}}$ preserva la función altura u por definición, para cualquier $p \in U_1$ y $s \geq t$ se tiene $\widehat{\mathbf{F}}_s(p) \in W_2$ y $u \circ \widehat{\mathbf{F}}_s(p) > -\varepsilon$, de donde $\widehat{\mathbf{F}}_s(p) \notin V_2$ y necesariamente $\widehat{\mathbf{F}}_s(p) \in U_2$. \square

Manteniendo la notación de la demostración del Teorema 3.16, supongamos que la isotopía aproximativa \mathbf{F} estuviese inducida por un homeomorfismo $f : \partial N_1 \longrightarrow \partial N_2$. Entonces la construcción de $\widehat{\mathbf{F}}$ se trivializa, en el sentido de que en el cilindro $[P_1, P'_1]$ es

$$\widehat{\mathbf{F}}_t(p) = \begin{cases} \langle f(q), u \rangle & \text{si } p = \langle q, u \rangle, \\ [K_2] & \text{si } p = [K_1], \end{cases}$$

independientemente de t , y $\widehat{\mathbf{F}}$ es de hecho una equivalencia de flujos. Podemos formular esto como sigue:

Observación 3.22. Sean K_1 y K_2 son compactos invariantes aislados unipuntuales para sendos flujos continuos en 3-variedades sin borde. Supongamos que N_1 y N_2 son bloques aislantes regulares para ellos K_1 y K_2 y que existe un homeomorfismo $f : \partial N_1 \longrightarrow \partial N_2$ que lleva N_1^e en N_2^e , n_1^+ en n_2^+ y es compatible con la dualidad (en particular, también lleva n_1^- en n_2^-). Entonces f posee una extensión $\widehat{f} : N_1 \longrightarrow N_2$ que es equivalencia de flujos.

Esta sencilla observación nos permite recuperar el teorema clásico de Hartman–Grobman en nuestro marco topológico.

Ejemplo 3.23. Sean K_1 y K_2 puntos de equilibrio hiperbólicos para sendas ecuaciones diferenciales $(E_1) : \dot{p}_1 = f_1(p_1)$ y $(E_2) : \dot{p}_2 = f_2(p_2)$, donde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son de clase \mathcal{C}^1 . Si ambos tienen el mismo índice cohomológico de Conley, entonces existen bloques aislantes N_1 y N_2 de K_1 y K_2 respectivamente que son bolas y una equivalencia de flujos entre ellos.

Demostración. Denotemos φ_1 y φ_2 los flujos que generan (E_1) y (E_2) . Tomemos N_1 bloque aislante regular de K_1 . Por el teorema de la variedad estable (véase por ejemplo [31], [77] o [84]) se sabe que N_1^- debe ser localmente k -euclídeo en K_1 , donde $0 \leq k \leq 3$ es el número de autovalores con parte real positiva de $D_{p_1} f_1$. Afirmamos que N_1^- es homeomorfo al cono sobre n_1^- . Para verlo, no hay más que observar que las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_1 : n_1^- \times [0, -\infty) &\longrightarrow N_1^- - \{K_1\} \\ (q_1, t) &\longrightarrow \varphi_1(q_1, t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_1 : N_1^- - K_1 &\longrightarrow n_1^- \times [0, -\infty) \\ p_1 &\longrightarrow (\pi_1^s(p_1), -t_1^s(p_1)) \end{aligned}$$

están bien definidas, son continuas, e inversa una de la otra. En consecuencia, las compactificaciones con un punto de $n_1^- \times [0, -\infty)$ y de $N_1^- - \{K_1\}$ son homeomorfas entre sí. Pero la primera es, a su vez, homeomorfa al cono sobre n_1^- , digamos $v * n_1^-$ (y v juega el papel de punto del infinito), mientras que la segunda es obviamente homeomorfa a N_1^- (con K_1 jugando el papel de punto del infinito). Por la unicidad de la compactificación con un punto, existe un homeomorfismo entre N_1^- y $v * n_1^-$ que lleva K_1 en v , y en consecuencia el cono $v * n_1^-$ resulta ser localmente euclídeo en el vértice porque N_1^- lo es en K_1 . Es un teorema clásico ([64, Theorem 4, p. 402], que cita a Mazur [46] como autor original del resultado) que entonces $\{v, w\} * n_1^-$, la suspensión de n_1^- , es homeomorfa a \mathbb{S}^k . Ahora bien, $\{v, w\} * n_1^- - \{v, w\}$ es homeomorfo a $n_1^- \times (-1, 1)$ y es una k -variedad, luego n_1^- es $(k-1)$ -variedad homológica. En particular, como $k-1 \leq 2$, se concluye que n_1^- es $(k-1)$ -variedad topológica. Además, es elemental

comprobar que $\tilde{H}_n(\{v, w\} * n_1^-) \cong \tilde{H}_{n-1}(n_1^-)$, luego n_1^- es una esfera homológica y por tanto homeomorfo a la $(k-1)$ -esfera. Asimismo, por [76, Corollary 2.(a), p. 1437] y la propiedad de continuidad de la cohomología de Čech es $CH^*(K_1) = \check{H}^*(N_1^-, n_1^-) = \check{H}^{*-1}(n_1^-)$, porque N_1^- es contractible al ser un cono. En definitiva, k está determinado por $CH^*(K_1)$ y así, si se efectúa el mismo procedimiento con K_2 y un bloque aislante regular suyo N_2 , se concluye que también n_2^- es homeomorfa a la $(k-1)$ -esfera.

Supongamos que $k = 2$, porque los restantes casos son más sencillos. Entonces de toda la discusión anterior y la Proposición 1.15 se sigue que N_1^s y N_2^s son anillos con circunferencia central n_1^- y n_2^- respectivamente, y por el Teorema de Schönflies ([53, Theorem 6., p. 68]) existe un homeomorfismo $N_1^s \rightarrow N_2^s$ tal que $h(n_1^-) = n_2^-$. Ahora, n_1^+ consta de un par de puntos $\{p_1, q_1\}$, cada uno de los cuales es centro de una 2-celda (digamos U_1 y V_1) de manera que $N_1^e = U_1 \cup V_1$, y análogamente n_2^+ consta de un par de puntos $\{p_2, q_2\}$, cada uno de los cuales es centro de una 2-celda (digamos U_2 y V_2) de manera que $N_2^e = U_2 \cup V_2$. Podemos extender el homeomorfismo h por dualidad a $U_1 - \{p_1\}$ y $V_1 - \{q_1\}$; más precisamente, ponemos $h(p) := h(p')'$ si $p \in (U_1 - \{p_1\}) \cup (V_1 - \{q_1\})$. Así $h : \partial N_1 - \{p_1, q_1\} \rightarrow \partial N_2 - \{p_2, q_2\}$ es un homeomorfismo que respeta la dualidad, y sólo queda extenderlo de manera continua a un homeomorfismo $h : \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$ poniendo $h(p_1) := p_2$ y $h(q_1) := q_2$ (o $h(p_1) := q_2$ y $h(q_1) := p_2$, según cómo se haya elegido la notación) y aplicar la Observación 3.22. \square

3.4. Modelos para las clases de st -equivalencia

El Teorema 3.16 proporciona un criterio para determinar cuándo dos flujos dados son localmente st -equivalentes en torno a compactos invariantes aislados con *shape* trivial, pero no ofrece un modelo sencillo para ellos que permita visualizarlos (en el mismo sentido en que las ecuaciones diferenciales lineales son un modelo para las no lineales en torno a puntos de equilibrio hiperbólico).

Definición 3.24. Una *descomposición de la esfera* es un par $\Delta := (P, Q)$, donde P y Q son 2-variedades compactas posiblemente con borde, tales que $P \cup Q = \mathbb{S}^2$ y $P \cap Q = \partial P = \partial Q$.

Si K es un compacto invariante aislado con *shape* trivial y N es un bloque aislante regular suyo, el par (N^e, N^s) es una descomposición de la esfera. Recíprocamente, mostraremos cómo asignar a cualquier descomposición Δ dada de la esfera un flujo en \mathbb{R}^3 que tenga al origen por compacto invariante aislado, la bola unidad N como bloque aislante regular y tal que $N^e = P$ y $N^s = Q$. Suponemos por tanto fijada una cierta descomposición $\Delta = (P, Q)$ de la esfera, y asumiremos sin pérdida de generalidad que P y Q son variedades diferenciables.

Para P y Q elijamos *espinas* $a(P) \subseteq \text{int}(P)$, y $a(Q) \subseteq \text{int}(Q)$, que son compactos tales que las inclusiones $a(P) \rightarrow P$ y $a(Q) \rightarrow Q$ inducen equivalencias *shape* (siempre existen, y una elección canónica en este sentido puede ser P^* y Q^* , el resultado de eliminar de P y Q un pequeño collar interior abierto de ∂P y ∂Q respectivamente). Adelantando acontecimientos, $a(P)$ será precisamente n^+ , mientras que $a(Q)$ jugará el papel de n^- .

Proposición 3.25. *Existen una función $\theta : \mathbb{S}^2 \rightarrow [-1, 1]$ de clase \mathcal{C}^1 y un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tales que (i.) $\theta^{-1}(1) = h a(P)$, (ii.) $\theta^{-1}(-1) = h a(Q)$, (iii.) $\theta^{-1}(0) = h \partial P = h \partial Q$ y (iv.) θ no tiene puntos críticos fuera de $h a(P) \cup h a(Q)$.*

En relación a la condición (iv.) sobre θ , nótese que todos los puntos de $ha(P)$ y $ha(Q)$ serán críticos, porque por (i.) y (ii.) en ellos se alcanzan máximos y mínimos globales, respectivamente.

Aunque en la mayoría de los casos razonables, con elecciones sencillas de $a(P)$ y $a(Q)$ (por ejemplo, familias de curvas diferenciables a pedazos, o puntos) se puede construir θ directamente por medios más o menos elementales y conseguir que $h = \text{id}_{\mathbb{S}^2}$, la generalidad con que hemos enunciado la Proposición 3.25 exige una prueba un poco más sofisticada, pero que en cualquier caso será sustancialmente más corta que una definición explícita de θ .

Demostración. (de la Proposición 3.25.) Si $P = \mathbb{S}^2$ o $Q = \mathbb{S}^2$ entonces necesariamente $a(P) = P$ o $a(Q) = Q$ respectivamente, $\partial P = \partial Q = \emptyset$ y basta elegir $\theta \equiv -1$ o $\theta \equiv 1$. Por tanto supondremos que P y Q son subconjuntos propios de \mathbb{S}^2 . Tómese un flujo en $\partial P \times [0, 1]$ que deje fijos a los puntos de la forma $(p, 0)$ y $(p, 1)$ y lleve cualquier otro (p, s) con $0 < s < 1$ “verticalmente” hacia $(p, 0)$ en tiempo positivo y hacia $(p, 1)$ en tiempo negativo; es claro que así $\{\partial P \times \{1\}, \partial P \times \{0\}\}$ es una descomposición de Morse de $\partial P \times [0, 1]$. Pasando al cociente $P \times [0, 1]/P \times \{1\}$ se obtiene un flujo que tiene $\{[\partial P \times \{1\}], \partial P \times \{0\}\}$ por descomposición de Morse.

Antes de proseguir necesitamos un resultado auxiliar:

Lema 3.26. *Sean P una 2-variedad compacta y $a(P) \subseteq P$ una espina suya. Entonces hay un homeomorfismo $g : P - a(P) \longrightarrow \partial P \times [0, +\infty)$ que identifica $p \in \partial P$ con $(p, 0) \in \partial P \times [0, +\infty)$.*

Demostración. Sea $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base decreciente de entornos regulares de $a(P)$ en $\text{int}(P)$, y pongamos también $P_0 := P$. Ahora, para cada $k \geq 0$ son $a(P) \subseteq P_{k+1}$ y $a(P) \subseteq P_k$ equivalencias *shape*, de modo que también lo es la inclusión $P_{k+1} \subseteq P_k$. Por el Lema B.5 existe un homeomorfismo $g_k : P_k - \text{int}(P_{k+1}) \longrightarrow \partial P_k \times [0, 1]$ tal que $g_k(p) = (p, 0)$ si $p \in \partial P_k$. A continuación pegaremos los g_k entre sí para obtener homeomorfismos $f_k : P_0 - \text{int}(P_k) \longrightarrow \partial P_0 \times [0, k]$ de manera inductiva. Comenzamos poniendo $f_1 := h_0$. Supuesto construido f_k , lo extendemos a f_{k+1} como sigue:

$$f_{k+1}(p) := \begin{cases} f_k(p) & \text{si } p \in P_0 - \text{int}(P_k), \\ (f_k \circ \pi_1 \circ g_k(p), \pi_2 \circ g_k(p) + k) & \text{si } p \in P_k - \text{int}(P_{k+1}). \end{cases}$$

Aquí π_1 y π_2 son las proyecciones del producto cartesiano $\partial P_k \times [0, 1]$ en el primer y segundo factor, respectivamente. Basta para terminar poner $f := \bigcup f_k$, que es un homeomorfismo de $P - a(P)$ en $\partial P \times [0, +\infty)$. \square

Continuando con la demostración de la proposición, el Lema 3.26 implica que hay un homeomorfismo entre $P/a(P)$ y $\partial P \times [0, 1]/\partial P \times \{1\}$ que lleva $[a(P)]$ en $[\partial P \times \{1\}]$. En efecto, tanto $P/a(P)$ como $\partial P \times [0, 1]/\partial P \times \{1\}$ son compactificaciones con un punto ($[a(P)]$ y $[\partial P \times \{1\}]$ respectivamente) de los espacios $P - a(P) \cong \partial P \times [0, 1]$, que acabamos de probar que son homeomorfos entre sí. Por la unicidad de compactificación de Alexandroff se sigue la afirmación que acabamos de hacer.

Transportando el flujo que hay en $P \times [0, 1]/P \times \{1\}$ a $P/a(P)$ se obtiene en este último espacio un flujo continuo que tiene a $\{[a(P)], \partial P\}$ por descomposición de Morse. Ahora, aplicando el Lema 2.6 existe un flujo continuo ψ_P en P que tiene a $\{a(P), \partial P\}$ por descomposición de Morse. Además ∂P está formada por puntos fijos.

El mismo proceso aplicado a Q , pero ahora partiendo de un flujo en $Q \times [0, 1]$ que lleve los puntos de 0 hacia 1 permite obtener un flujo continuo ψ_Q en Q que tiene a $\{\partial Q, a(Q)\}$ por descomposición de Morse, y además ∂Q está formado por puntos fijos. Por tanto ψ_P y ψ_Q coinciden en $\partial P = \partial Q$ y pueden pegarse para dar lugar a un flujo ψ en \mathbb{S}^2 que tiene la descomposición de Morse $\mathcal{M} := \{a(P), \partial P = \partial Q, a(Q)\}$. Por el teorema de Gutiérrez [30, Smoothing Theorem., p. 17] existe una equivalencia topológica de ψ con un flujo de clase \mathcal{C}^1 . Es decir, existen un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y ψ^* flujo de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{S}^2 tales que h lleva trayectorias orientadas de ψ sobre trayectorias orientadas de ψ^* de manera homeomórfica. Claramente $h\mathcal{M} := \{ha(P), h\partial P = h\partial Q, ha(Q)\}$ es una descomposición de Morse para ψ^* , y podemos elegir θ una función de Morse de clase \mathcal{C}^1 para $h\mathcal{M}$ que tome los valores 1, 0 y -1 en los conjuntos de $h\mathcal{M}$, como estipula el enunciado de la proposición. Que θ no tiene puntos críticos fuera de la unión de los conjuntos de $h\mathcal{M}$ es consecuencia inmediata de su propiedad de ser estrictamente decreciente en las trayectorias de ψ^* . \square

Para obtener el flujo deseado en \mathbb{R}^3 tenemos que extender ψ que apareció en la demostración del Lema 3.26 añadiendo una componente radial que provoque que los puntos de $a(P)$ converjan a 0 y los de $a(Q)$ se alejen de él. Ello sugiere considerar el siguiente campo de vectores:

$$X_p := \begin{cases} -\|p\| \nabla_{\frac{p}{\|p\|}} \theta - p \cdot \theta \left(\frac{p}{\|p\|} \right) & \text{si } p \neq 0, \\ 0 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Proposición 3.27. *Se considera la ecuación diferencial $(E) : \dot{p} = X_p$ en \mathbb{R}^3 .*

1. *Hay existencia y unicidad de soluciones, que además están definidas en todo \mathbb{R} , para (E) . En particular, (E) determina un flujo continuo en \mathbb{R}^3 .*

Si $p(t)$ es una solución no trivial de (E) y $u(t) := \frac{p(t)}{\|p(t)\|}$, se cumple que:

2. $\|p(t)\| = \|p(0)\| e^{-\theta \circ u(t)t},$
3. *si $u(0) \notin ha(P) \cup ha(Q)$ entonces $\theta \circ u(t)$ es estrictamente decreciente con t creciente y además $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta \circ u(t) = \mp 1$. En otro caso, es*

$$\theta \circ u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(0) \in ha(P), \\ -1 & \text{si } u(0) \in ha(Q). \end{cases}$$

Demostración. Es claro que para la condición inicial $p(0) = 0$ hay existencia y unicidad de soluciones ($p(t) \equiv 0$), que está definida además en todo \mathbb{R}^3 . Por otro lado, puesto que X_p es de clase \mathcal{C}^1 en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, si se restringe (E) a una ecuación diferencial en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ entonces se tiene garantizada también la existencia y unicidad de soluciones, pero no necesariamente definidas en todo \mathbb{R} . Esta última propiedad será consecuencia de la igualdad (2), y por tanto comenzaremos demostrando esta última. Sea $p : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una solución maximal de (E) en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

(2) Como $\nabla_{u(t)} \theta$ es un vector tangente a \mathbb{S}^2 en $u(t)$, es ortogonal a $u(t)$ y en consecuencia a $p(t)$. Es decir, se tiene $\langle p(t), \nabla_{u(t)} \theta \rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|p(t)\|^2 &= 2\langle p(t), \dot{p}(t) \rangle = 2\langle p(t), X_{p(t)} \rangle = \\ &= -2\|p(t)\| \langle p(t), \nabla_{u(t)} \theta \rangle - 2\theta \circ u(t) \langle p(t), p(t) \rangle = -2\|p(t)\|^2 \theta \circ u(t). \end{aligned}$$

Puesto que $p(t) \neq 0$ para $t \in (\alpha, \beta)$, se puede calcular

$$\frac{d}{dt} \log \|p(t)\|^2 = \frac{1}{\|p(t)\|^2} \frac{d}{dt} \|p(t)\|^2 = -2\theta \circ u(t),$$

o también

$$\frac{d}{dt} \log \|p(t)\| = -\theta \circ u(t),$$

que al integrar da

$$\|p(t)\| = \|p(0)\| e^{-\theta \circ u(t)t} \text{ para } t \in (\alpha, \beta).$$

(1) Podemos ya probar que $\alpha = -\infty$ y $\beta = +\infty$. Supongamos por un momento que $\beta < +\infty$. Como θ está acotado por 1 en valor absoluto, para $t \in (\alpha, \beta)$ se tiene $-\beta \leq -|t| \leq -\theta \circ u(t)t \leq |t| \leq \beta$ y por la fórmula de (2) es

$$\|p(0)\| e^{-\beta} \leq \|p(t)\| \leq \|p(0)\| e^{\beta}.$$

Esto implica que $p(t)$ pertenece al anillo

$$A := \left\{ q \in \mathbb{R}^3 : \|p(0)\| e^{-\beta} \leq \|q\| \leq \|p(0)\| e^{\beta} \right\}$$

para todo $t \geq 0$, que es un conjunto compacto contenido en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Esto contradice el hecho bien conocido de que $p(t)$ debe abandonar cualquier compacto de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ cuando $t \rightarrow \beta^+$ (véase por ejemplo [18, Theorem 4.1., p. 15] y la discusión que lo precede). Por tanto $\beta = +\infty$, y un argumento análogo prueba que $\alpha = -\infty$ también. Finalmente, [18, Theorem 4.1., p. 58] muestra que (E) da lugar a un flujo.

(3) Es inmediato calcular que

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} \frac{p(t)}{\|p(t)\|} = \frac{\dot{p}(t)\|p(t)\|^2 - p(t)\langle p(t), \dot{p}(t) \rangle}{\|p(t)\|^3},$$

y sustituyendo la expresión para $\langle p(t), \dot{p}(t) \rangle$ que también usamos en la parte (1) y simplificando, resulta

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{\|p(t)\|^3} [X_{p(t)}\|p(t)\|^2 + p(t)\|p(t)\|^2 \theta \circ u(t)] = -\nabla_{u(t)} \theta.$$

De aquí se sigue inmediatamente que

$$\frac{d}{dt} (\theta \circ u)(t) = \langle \nabla_{u(t)} \theta, \dot{u}(t) \rangle = -\|\nabla_{u(t)} \theta\|^2.$$

Si $u(0) \in ha(P) \cup ha(Q)$, entonces $\nabla_{u(0)} \theta = 0$ y por tanto $\theta \circ u(t)$ es constante. Como $\theta|_{ha(P)} \equiv 1$ y $\theta|_{ha(Q)} \equiv -1$, se sigue que $\theta \circ u(t) \equiv 1$ si $u(0) \in ha(P)$ y $\theta \circ u(t) \equiv -1$ si $u(0) \in ha(Q)$.

Supongamos ahora que $u(0) \notin ha(P) \cup ha(Q)$. Afirmamos que $\theta \circ u(t) \rightarrow -1$ si $t \rightarrow +\infty$. En efecto, si no fuese así existirían $\varepsilon > 0$ y una sucesión $t_k \rightarrow +\infty$ tales que $\theta \circ u(t_k) \geq -1 + \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, $\theta \circ u$ no puede ser creciente por la ecuación diferencial obtenida más arriba para ella, de modo que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, eligiendo $t_k > t$ se tiene $\theta \circ u(t) \geq \theta \circ u(t_k) \geq -1 + \varepsilon$. Por tanto $u(t) \in J :=$

$\theta^{-1}[\theta \circ u(0), -1 + \varepsilon]$. Pero por definición de θ este último conjunto es un compacto que no corta a $ha(P) \cup ha(Q)$, luego $\inf_{u \in J} \|\nabla_u \theta\|^2 = m > 0$ y entonces

$$\theta \circ u(s) - \theta \circ u(0) = \int_0^s \frac{d}{dt}(\theta \circ u)(t) dt \leq -ms$$

lo que no es posible ya que implica que $\theta \circ u(s) \rightarrow -\infty$ si $s \rightarrow +\infty$ y contradice que θ esté acotada. \square

Teorema 3.28. *Sea $\Delta = (P, Q)$ una descomposición de \mathbb{S}^2 y $a(P) \subseteq \text{int}(P)$, $a(Q) \subseteq \text{int}(Q)$ espinas. Existe un flujo continuo φ_Δ en \mathbb{R}^3 tal que $K := \{0\}$ es un compacto invariante aislado para φ_Δ , $N := \mathbb{D}^3$ es un bloque aislante regular de K y además*

1. $N^e = P$ y $N^s = Q$,
2. $n^+ = a(P)$ y $n^- = a(Q)$,
3. $N^+ = 0 * a(P)$ y $N^- = 0 * a(Q)$.

En particular $h(K) = (\mathbb{S}^0 * Q, *)$ y $\ell(K) = (\mathbb{S}^2, P)$.

Demostración. Sea $p(t)$ una solución no trivial para la ecuación (E).

Si $p(0) \in 0 * ha(P)$, entonces $u(0) \in ha(P)$ y por la Proposición 3.27 es $\theta \circ u(t) \equiv 1$. Por tanto $\|p(t)\| = \|p(0)\|e^{-\theta \circ u(t)t} = \|p(0)\|e^{-t}$, luego para $t \geq 0$ es $\|p(t)\| \leq \|p(0)\| \leq 1$ y $p(0) \in N^+$. Así pues $0 * ha(P) \subseteq N^+$, y del mismo modo se comprueba que $0 * ha(Q) \subseteq N^-$.

Supongamos ahora que $p(0) \notin 0 * ha(P) \cup 0 * ha(Q)$, luego $u(0) \notin ha(P) \cup ha(Q)$ y $-1 < \theta \circ u(0) < 1$. Por la Proposición 3.27 se tiene $\theta \circ u(t) \rightarrow -1$ si $t \rightarrow +\infty$, de donde $\|p(t)\| = \|p(0)\|e^{-\theta \circ u(t)t} \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$. Esto implica que $p(0) \notin N^+$, y de modo análogo se comprueba que $p(0) \notin N^-$. Por tanto se concluye que $N^+ = 0 * ha(P)$, $N^- = 0 * ha(Q)$ y $K := N^+ \cap N^- = \{0\}$ es el invariante maximal en N . Además $n^+ = N^+ \cap \partial N = ha(P)$ y $n^- = N^- \cap \partial N = ha(Q)$.

Comprobemos que $N = \mathbb{D}^3$ es un bloque aislante para K (si lo es, evidentemente es regular). Sea $p(0) \in \partial N$, y supongamos primero que $\theta(p(0)) > 0$. Entonces, como $u(0) = p(0)$ y por ello $\theta \circ u(0) > 0$, por continuidad existe $\varepsilon > 0$ tal que $\theta \circ u(t) > 0$ siempre que $|t| < \varepsilon$. De aquí $-\theta \circ u(t)t < 0$ si $0 < t < \varepsilon$ y $-\theta \circ u(t)t > 0$ si $-\varepsilon < t < 0$, lo que por la Proposición 3.27 implica que $\|p(t)\| < 1$ si $0 < t < \varepsilon$ y $\|p(t)\| > 1$ si $-\varepsilon < t < 0$. Es decir, que $p(0)$ es un punto de entrada transversal en N . Análogamente se comprueba que si $\theta(p(0)) = 0$, entonces $p(0)$ es un punto de salida transversal. Finalmente, supongamos que $\theta(p(0)) = 0$. Como $-\theta \circ u(t)$ es estrictamente creciente en t por la Proposición 3.27 y $\theta \circ u(0) = 0$, se sigue que $-\theta \circ u(t)t > 0$ si $t \neq 0$. Por tanto $\|p(t)\| = e^{-\theta \circ u(t)t} > 1$ si $t \neq 0$, luego $p \in N^e \cap N^s$. Esto prueba que N es un bloque aislante de K y $N^e = \{p \in \partial N : \theta(p) \geq 0\} = P$ y $N^s = \{p \in \partial N : \theta(p) \leq 0\} = Q$.

Todo lo anterior muestra que el flujo φ_Δ^* generado por (E) satisface todas las condiciones del enunciado del teorema, pero con $a(P)$ y $a(Q)$ sustituidas por $ha(P)$ y $ha(Q)$ y P y Q sustituidas por hP y hQ . Para remediarlo, sea \hat{h} la extensión radial del homeomorfismo h de la Proposición 3.27 a todo \mathbb{R}^3 , esto es

$$\hat{h}(p) := \begin{cases} \|p\| h\left(\frac{p}{\|p\|}\right) & \text{si } p \neq 0, \\ 0 & \text{si } p = 0, \end{cases}$$

y pongamos $\varphi_\Delta(p, t) := \widehat{h} \circ \varphi_\Delta^*(\widehat{h}^{-1}(p), t)$ el conjugado de φ_Δ^* mediante \widehat{h}^{-1} . Puesto que $\widehat{h}^{-1}(K) = K$ y $\widehat{h}^{-1}(N) = N$, es inmediato que φ_Δ cumple todas las exigencias del teorema.

Sólo queda probar que $h(K) = (\mathbb{S}^0 * Q, *)$ para el flujo φ . Quizás aquí sea más fácil visualizar $s(K)$, el índice *shape* de K . Por [76, Corollary 2.(a), p. 1437] se sabe que $s(K) = \text{Sh}\left(\frac{N^-}{n^-}, [n^-]\right)$, y puesto que $(N^-, n^-) = (0 * a(Q), a(Q))$, claramente $\frac{N^-}{n^-} = \mathbb{S}^0 * a(Q)$. Pero $a(Q)$ tiene el mismo *shape* que Q por ser espina suya, por lo que $s(K) = \mathbb{S}^0 * Q$. Así N/N^s , que es un ANR, tiene el mismo *shape* que $\mathbb{S}^0 * Q$, que también es un ANR. Por tanto tienen el mismo tipo de homotopía, que es $h(K)$. \square

Corolario 3.29. *Sea K un compacto invariante aislado con shape trivial para un flujo continuo φ en una 3-variedad M . Entonces, las posibles clases de *st-equivalencia* de φ en torno a K están en biyección con las clases de equivalencia de descomposiciones de la esfera.*

Demostración. La aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de } st\text{-equivalencia} \\ \text{de flujos en torno a } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\ell} \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de equivalencia de} \\ \text{descomposiciones de la esfera} \end{array} \right\}$$

está bien definida y es inyectiva por el Teorema 3.16. Que es sobreyectiva se sigue del Teorema 3.28. \square

3.5. Descomposiciones de la esfera

Las secciones anteriores han puesto de manifiesto el interés que tiene estudiar las descomposiciones de la esfera, puesto que éstas caracterizan (a través del índice local) las clases de *st-equivalencia* de flujos en torno a compactos invariantes aislados con *shape* trivial. Por tanto, dedicamos las siguientes líneas a intentar enumerar y clasificar las posibles descomposiciones de la esfera.

Será conveniente en adelante generalizar de la manera obvia la Definición 3.24 a descomposiciones de superficies compactas arbitrarias, posiblemente con borde y no necesariamente conexas:

Definición 3.30. Una *descomposición* de una superficie D es un par $\Delta := (P, Q)$, donde P y Q son 2-variedades compactas posiblemente con borde, tales que $P \cup Q \cong D$ y $P \cap Q = \partial P = \partial Q$. Dos descomposiciones $\Delta = (P, Q)$ y $\Delta' = (P', Q')$ se considerarán *equivalentes* si existe un homeomorfismo de pares $h : (P \cup Q, P) \longrightarrow (P' \cup Q', P')$ (un tal homeomorfismo lleva, además, Q en Q').

En esta sección mostraremos cómo a cada descomposición Δ de la esfera se le puede asignar un grafo $\Gamma(\Delta)$ de cierto tipo especial y, recíprocamente, a cada uno de estos grafos Γ le corresponde una descomposición $\Delta(\Gamma)$ de la esfera. Conviene hacer notar que, a partir de aquí, los resultados (empezando por la Proposición 3.32) que se presentan tienen validez, tal y como están formulados, sólo en espacios de fases de dimensión 3 (en dimensiones menores las cosas se simplifican).

El grafo asociado a una descomposición. Supongamos que $\Delta = (P, Q)$ es una descomposición de la esfera, y pongamos P_0, \dots, P_r y Q_0, \dots, Q_s para las componentes de P y Q respectivamente. Puede ser $r = -1$ o $s = -1$ si alguno de P o Q es vacío.

Construyamos un grafo $\Gamma(\Delta)$ como sigue. Por cada componente P_i de P pongamos un vértice p_i , y por cada componente Q_j de Q pongamos un vértice q_j . A los vértices $\{p_0, \dots, p_r\}$ los llamaremos, genéricamente, p -vértices; mientras que a los vértices $\{q_0, \dots, q_s\}$ los llamaremos, genéricamente, q -vértices. Dos vértices p_i y q_j están unidos por una arista e_{ij} si, y sólo si, $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$. No hay aristas entre p -vértices o entre q -vértices.

Los grafos $\Gamma(\Delta)$ que resultan de este proceso no son de cualquier tipo. Para enunciar sus propiedades clave (Proposición 3.32) necesitamos una definición previa:

Definición 3.31. Un grafo Γ con vértices $\{p_0, \dots, p_r, q_0, \dots, q_s\}$ se dirá que es *alternado* si toda arista de Γ une un p -vértice con un q -vértice (es decir, no hay aristas entre p -vértices o entre q -vértices).

Proposición 3.32. *El grafo $\Gamma(\Delta)$ asociado a cualquier descomposición Δ de la esfera es un árbol alternado.*

Demostración. Que $\Gamma(\Delta)$ es alternado es por construcción. Veamos que es un árbol.

(a) $\Gamma(\Delta)$ es conexo. Para cada vértice w de $\Gamma(\Delta)$ denotemos $(P \oplus Q)_w$ la componente conexa de $P \oplus Q$ que corresponde a w . Fijemos w_0, w_1 dos vértices cualesquiera de $\Gamma(\Delta)$ y elijamos puntos $z_0 \in (P \oplus Q)_{w_0}$ y $z_1 \in (P \oplus Q)_{w_1}$. Como $P \cup Q \cong \mathbb{S}^2$, que es conexo, hay un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ que une z_0 con z_1 . Ahora, para cada vértice w de $\Gamma(\Delta)$ sea

$$C_w := \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in (P \oplus Q)_w\},$$

que es claramente un cerrado en $[0, 1]$ porque γ es continua y $(P \oplus Q)_w$ es cerrado. Pongamos además $w \sim v$ si existe un camino en $\Gamma(\Delta)$ que une w con v , y

$$C_0 := \bigcup_{w \sim w_0} C_w \text{ y } C_1 := \bigcup_{w \sim w_1} C_w.$$

Obsérvese que, si $C_v \cap C_0 \neq \emptyset$, existe $w \sim w_0$ tal que $C_w \cap C_v$. Pero entonces, tomando $t \in C_w \cap C_v$, se tiene que $\gamma(t) \in (P \oplus Q)_w \cap (P \oplus Q)_v$, de modo que w y v han de estar conectados por una arista en $\Gamma(\Delta)$ y así $w_0 \sim w \sim v$, luego $w_0 \sim v$. Lo mismo puede argumentarse para C_1 . Poniendo entonces

$$C^* := \bigcup_{\substack{w \not\sim w_0 \\ w \not\sim w_1}} C_w$$

se concluye que C^* es disjunto con C_0 y con C_1 . Ahora $[0, 1] = (C_0 \cup C_1) \cup C^*$ es una unión disjunta de los cerrados $C_0 \cup C_1$ y C^* , de los cuales el primero es no vacío (pues $0 \in C_0$ y $1 \in C_1$). Como $[0, 1]$ es conexo, necesariamente $C^* = \emptyset$, lo cual a su vez implica (de nuevo por la conexión de $[0, 1]$) que $C_0 \cap C_1 \neq \emptyset$. Por tanto $w_0 \sim w_1$, como queríamos.

(b) $\Gamma(\Delta)$ es un árbol. Puesto que ya sabemos que es conexo, será suficiente demostrar que $\chi\Gamma(\Delta) = 1$. Por un lado, $\Gamma(\Delta)$ consta de $(r+1) + (s+1) = r+s+2$ vértices. Y por otro lado, tiene tantas aristas como componentes tiene la intersección $P \cap Q$. Puesto que $P \cup Q \cong \mathbb{S}^2$, de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$H_1(\mathbb{S}^2) = 0 \longrightarrow H_0(P \cap Q) \longrightarrow H_0(P) \oplus H_0(Q) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

se sigue que $\text{rk } H_0(P \cap Q) = r + s + 1$, y $P \cap Q$ tiene $r + s + 1$ componentes conexas. En definitiva, $\chi\Gamma(\Delta) = r + s + 2 - (r + s + 1) = 1$. \square

Es claro que si dos descomposiciones de la esfera Δ y Δ' son equivalentes, los grafos $\Gamma(\Delta)$ y $\Gamma(\Delta')$ son *isomorfos* como grafos alternados, en el siguiente sentido:

Definición 3.33. Dos grafos alternados Γ y Γ' son *isomorfos* si existe una biyección f entre los vértices de Γ y Γ' que lleva p -vértices en p -vértices y q -vértices en q -vértices y además preserva las aristas. Esto es, en Γ existe una arista e_{ij} que conecta p_i con q_j si, y sólo si, en Γ' existe una arista e'_{ij} que conecta $f(p_i)$ con $f(q_j)$.

En efecto, si Δ y Δ' son equivalentes, existe un homeomorfismo $h : (P \cup Q, P) \rightarrow (P' \cup Q', P')$ que induce una biyección entre las componentes de P y P' y de Q y Q' (por tanto, una biyección entre los vértices de $\Gamma(\Delta)$ y $\Gamma(\Delta')$ que preserva p -vértices y q -vértices) y además $P_i \cap Q_j \neq \emptyset \Leftrightarrow h(P_i) \cap h(Q_j) \neq \emptyset$, luego en $\Gamma(\Delta)$ hay una arista entre p_i y q_j si, y sólo si, en $\Gamma(\Delta')$ hay una arista entre p'_i y q'_j .

Para analizar en qué medida $\Gamma(\Delta)$ permite recuperar la descomposición Δ , llamemos *pieza esférica* a toda 2-variedad compacta y conexa que pueda encajarse dentro de \mathbb{S}^2 . Si $\Delta = (P, Q)$ es una descomposición esférica, obviamente las componentes de P y Q son piezas esféricas. Veremos a continuación que a partir de $\Gamma(\Delta)$ se pueden recuperar P , Q y las relaciones de incidencia entre sus componentes.

Para empezar, necesitamos algunas propiedades básicas de las piezas esféricas:

Lema 3.34. Sea S una pieza esférica, y denotemos por r al número de componentes de ∂S . Entonces:

1. S es orientable. Además, si S está orientada, puede encajarse en \mathbb{S}^2 de modo que la orientación que hereda coincida con la suya propia.
2. Si $S \subseteq \mathbb{S}^2$, entonces $S^* := \mathbb{S}^2 - \text{int}(S)$ es una unión de r 2-celdas disjuntas,
3. $\chi(S) = 2 - r$.

Demostración. (1) Que cada S es orientable es obvio, porque puede encajarse en \mathbb{S}^2 , que es orientable, y $\dim(S) = \dim(\mathbb{S}^2)$. Por otro lado, si S está orientada y un cierto encaje $e : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ no preserva la orientación, basta sustituir e por $r_2 \circ e$, donde r_2 es la reflexión $r_2(x, y, z) := (x, y, -z)$ de \mathbb{S}^2 .

(2) Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ las componentes de ∂S , todas ellas homeomorfas a \mathbb{S}^1 . Por el Teorema de Schönflies (ver, por ejemplo, [53, Theorem 6., p. 68]) cada γ_k separa \mathbb{S}^2 en dos componentes conexas U_k y V_k cuyas adherencias son 2-celdas. Como S es conexa, también lo es $\text{int}(S)$ y en consecuencia estará contenido en U_k o en V_k para cada $1 \leq k \leq r$; supondremos lo primero. Ahora, $\hat{S} := S \cup \overline{V}_1 \cup \dots \cup \overline{V}_r$ es una 2-variedad compacta sin borde contenida en \mathbb{S}^2 . Esto implica que $\hat{S} = \mathbb{S}^2$, porque por dualidad de Alexander

$$H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - \hat{S}) = H^2(\hat{S}) = \mathbb{Z}$$

y esto sólo sucede si $\mathbb{S}^2 - \hat{S} = \emptyset$. Por tanto, $S^* = \mathbb{S}^2 - \text{int}(S) = \hat{S} - \text{int}(S) = \bigcup_{k=1}^r \overline{V}_k$, lo que completa la prueba de (2).

(3) Como $\mathbb{S}^2 = S \cup S^*$ y $S \cap S^*$ es una unión de circunferencias, que tienen característica de Euler nula, se verifica que

$$2 = \chi(\mathbb{S}^2) = \chi(S) + \chi(S^*) = \chi(S) + r,$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que S^* es una unión de r discos disjuntos. En consecuencia $\chi(S) = 2 - r$. \square

El siguiente resultado permite comparar piezas esféricas entre sí, y muestra que están caracterizadas por el número de componentes de su borde.

Lema 3.35. *Sean S_1 y S_2 piezas esféricas orientadas.*

1. *Cualquier homeomorfismo $h : \partial S_1 \longrightarrow \partial S_2$ que preserve la orientación puede extenderse a un homeomorfismo $\hat{h} : S_1 \longrightarrow S_2$.*
2. *Son equivalentes:*
 - a) $S_1 \cong S_2$,
 - b) $\chi(S_1) = \chi(S_2)$,
 - c) ∂S_1 y ∂S_2 tienen la misma cantidad de componentes.

En particular, para cualquier $r \geq 0$ existe una única (salvo homeomorfismo) pieza esférica S con r componentes en ∂S .

Demostración. (1) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{S}^2$ y que \mathbb{S}^2 está orientada de manera que la orientación que heredan S_1 y S_2 de ella coincide con la suya propia. Denotemos r el número de componentes de ∂S_1 y ∂S_2 (que es el mismo), por el Lema 3.34 (y con la misma notación que allí) se sabe que S_1^* y S_2^* son uniones de r celdas disjuntas. Como $\partial S_1 = \partial S_1^*$ y $\partial S_2 = \partial S_2^*$, puede pensarse en h como un homeomorfismo de ∂S_1^* en ∂S_2^* , y por el truco de Alexander (Lema 3.18) aplicado r veces, h posee una extensión a un homeomorfismo $H : S_1^* \longrightarrow S_2^*$ que preserva la orientación. Así tenemos dos encajes distintos de una unión de r discos en \mathbb{S}^2 , en concreto la inclusión $i : S_1^* \subseteq \mathbb{S}^2$ y el homeomorfismo

$$H : S_1^* \longrightarrow S_2^* \subseteq \mathbb{S}^2.$$

Ambos preservan la orientación, y por [35, 3.2. Theorem, p. 186] (que es para encajes diferenciables, pero se aplica igual en nuestro contexto porque estamos trabajando con superficies) existe un homeomorfismo $\hat{H} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ que lleva un encaje en otro, es decir, tal que $H = \hat{H} \circ i$. En particular $\hat{H}(S_1^*) = S_2^*$, de donde $\hat{H}(S_1) = S_2$. Asimismo $\hat{H}|_{\partial S_1^*} = H|_{\partial S_1^*} = h|_{\partial S_1^*}$, luego \hat{H} extiende a h .

(2) La equivalencia (b) \Leftrightarrow (c) es una consecuencia inmediata del Lema 3.34. La implicación (a) \Rightarrow (c) es trivial. Para probar (c) \Rightarrow (a), oriéntense S_1 y S_2 y tómesese cualquier homeomorfismo $h : \partial S_1 \longrightarrow \partial S_2$ que preserve la orientación (que existe es consecuencia de que tanto ∂S_1 como ∂S_2 son una unión disjunta de r copias de la 1-esfera \mathbb{S}^1). Sólo resta extender h a un homeomorfismo de S_1 en S_2 utilizando la parte (1) de este Lema.

Respecto a la última afirmación del Lema (existencia y unicidad de una pieza esférica con característica $2 - r$ para cualquier $r \geq 0$), sólo hace falta probar la existencia puesto que la unicidad se sigue del apartado (2) del Lema. Pero ello es fácil: dado $r \geq 0$, sean D_1, \dots, D_r discos cerrados disjuntos contenidos en \mathbb{S}^2 y tómesese $S := \mathbb{S}^2 - \bigcup_{i=1}^r \text{int}(D_i)$. Es claro que S es una pieza esférica, y $\partial S = \bigcup_{i=1}^r \partial D_i$ consta de r componentes. \square

De este último resultado se desprende que, si $\Delta = (P, Q)$ es una descomposición esférica, pueden recuperarse P y Q a partir de $\Gamma(\Delta)$. En efecto, basta observar que por construcción la valencia de un vértice p_i en Γ , que es el número de aristas incidentes en él y denotaremos $|p_i|$, coincide con el número de componentes en ∂P_i . Por el Lema 3.35 P_i queda así unívocamente determinada, y también $P := \biguplus_{i=0}^r P_i$. Análogamente puede obtenerse Q . Además las relaciones de incidencia entre ∂P y ∂Q también están codificadas en $\Gamma(\Delta)$, pues $\partial P_i = \partial Q_j$ si, y sólo si, existe en $\Gamma(\Delta)$ una arista e_{ij} entre p_i y q_j . Esto motiva la construcción que describimos a continuación.

La descomposición asociada a un grafo. Supongamos que Γ es un grafo alternado con vértices $\{p_0, \dots, p_r\}$ y $\{q_0, \dots, q_s\}$. Por cada vértice p_i de Γ sea P_i una pieza esférica orientada con $|p_i|$ componentes en ∂P_i , donde $|p_i|$ es la valencia de p_i . Análogamente, por cada vértice q_j de Γ sea Q_j una pieza esférica con $|q_j|$ componentes en ∂Q_j . Las piezas P_i y Q_j existen y están unívocamente determinadas (salvo homeomorfismo) en virtud del Lema 3.35. Denotemos $P := \bigoplus_{i=0}^r P_i$ y $Q := \bigoplus_{j=0}^s Q_j$.

Para cada arista $\gamma = p_i q_j$ de Γ (recuérdese que Γ es un grafo alternado, y por ello γ tiene por extremos un p -vértice y un q -vértice) seleccionemos una componente γ_1 de ∂P_i , una componente γ_2 de ∂Q_j de modo que a distintas γ 's les correspondan distintas elecciones (nótese que esto es posible porque hay exactamente $|p_i|$ aristas incidentes en p_i , que es precisamente la cantidad de componentes de ∂P_i por construcción; y análogamente para ∂Q_j) y un homeomorfismo $f_\gamma : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ que preserve la orientación. Finalmente, sea $P +_{(f_\gamma)} Q$ el espacio resultante de identificar en $P \oplus Q$ cada punto $p \in \gamma_1$ con $f_\gamma(p) \in \gamma_2$, cuando γ recorre las aristas de Γ . Consideraremos P y Q como subespacios de $P +_{(f_\gamma)} Q$ y pondremos $\Delta_{(f_\gamma)}(\Gamma) := (P, Q)$.

Proposición 3.36. *El par $\Delta_{(f_\gamma)}(\Gamma)$ obtenido a partir de un árbol alternado Γ es una descomposición de la esfera.*

Demostración. Sólo hemos de comprobar que $P +_{(f_\gamma)} Q$ es homeomorfo a la 2-esfera, pues por definición las restantes condiciones de la Definición 3.24 se cumplen de modo automático. Es claro que en el proceso descrito arriba cada arista γ aparece como etiqueta de exactamente una componente de ∂P y una de ∂Q . Además, cada componente de ∂P es pegada a una componente de ∂Q , de manera que $P +_{(f_\gamma)} Q$ es una 2-variedad compacta sin borde.

(a) $P +_{(f_\gamma)} Q$ es conexa. En efecto, sean $P_i, Q_j \subseteq P +_{(f_\gamma)} Q$ dos piezas esféricas cualesquiera, que están representadas en Γ por los vértices p_i y q_j . Como Γ es conexo, existen vértices v_0, \dots, v_n tales que $v_0 = p_i$, $v_n = q_j$ y entre cada dos vértices consecutivos v_k, v_{k+1} hay una arista en Γ . En particular, v_k y v_{k+1} representan componentes de P o de Q que se pegan entre sí, y en consecuencia están en la misma componente conexa de $P +_{(f_\gamma)} Q$ (recuérdese que las piezas esféricas son conexas por definición). Por lo tanto P_i y Q_j están en la misma componente conexa de $P +_{(f_\gamma)} Q$, y esto prueba que $P +_{(f_\gamma)} Q$ es conexo.

(b) $P +_{(f_\gamma)} Q$ es homeomorfa a la 2-esfera. Para probarlo bastará ver que $\chi(P +_{(f_\gamma)} Q) = 2$ puesto que ya sabemos que $P +_{(f_\gamma)} Q$ es conexa. Pongamos e_0 y e_1 para el número de vértices y aristas de Γ , respectivamente. Entonces, como $\chi(P_i) = 2 - |p_i|$ y $\chi(Q_j) = 2 - |q_j|$ por la definición de las piezas P_i y Q_j y el Lema 3.34, se tiene

$$\chi(P +_{(f_\gamma)} Q) = \sum_{i=0}^r \chi(P_i) + \sum_{j=0}^s \chi(Q_j) = 2e_0 - \sum_{i=0}^r |p_i| - \sum_{j=0}^s |q_j|.$$

Por otro lado, como Γ es un grafo alternado, cada arista tiene exactamente un p -vértice y un q -vértice por extremos, de modo que

$$\sum_{i=0}^r |p_i| = \sum_{j=0}^s |q_j| = e_1.$$

Así

$$\chi(P +_{(f_\gamma)} Q) = 2e_0 - 2e_1 = 2\chi(\Gamma) = 2,$$

donde la última igualdad se sigue porque Γ es un árbol. \square

Proposición 3.37. *Si Γ es un árbol alternado, la clase de equivalencia de la descomposición $\Delta_{(f_\gamma)}(\Gamma)$ es independiente de las elecciones efectuadas en su construcción.*

Demostración. Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 3.38. *Sean S_1 y S_2 piezas esféricas orientadas, γ_1 y γ_2 componentes de ∂S_1 y ∂S_2 respectivamente y $f : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ un homeomorfismo cualquiera que preserve la orientación. Denotemos $S_1 +_f S_2$ el resultado de pegar γ_1 con γ_2 a través de f . Entonces, la descomposición (S_1, S_2) de $S_1 +_f S_2$ es independiente de la elección de γ_1 , γ_2 y f .*

Demostración. Sean $\delta_1 \subseteq \partial S_1$, $\delta_2 \subseteq \partial S_2$ y $g : \delta_1 \rightarrow \delta_2$ elecciones alternativas para γ_1 , γ_2 y $f : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Queremos probar que existe un homeomorfismo $H : S_1 +_f S_2 \rightarrow S_1 +_g S_2$ tal que $h(S_1) = S_1$ y $h(S_2) = S_2$.

(1) Supongamos en primer lugar que $\delta_1 = \gamma_1$ y $\delta_2 = \gamma_2$. Entonces $g^{-1} \circ f : \gamma_1 \rightarrow \gamma_1$ es un homeomorfismo de la 1-esfera que preserva la orientación, y existe $\hat{h} : S_1 \rightarrow S_1$ homeomorfismo que preserva la orientación y tal que $\hat{h}|_{\partial S_1} = g^{-1} \circ f$ (extiéndase primero f a ∂S_1 preservando la orientación y luego aplíquese el Lema 3.35). En particular, para cualquier $p \in \partial S_1$ es $g \circ \hat{h}(p) = f(p)$ y por tanto $\hat{h} \oplus \text{id}_{S_2} : S_1 \oplus S_2 \rightarrow S_1 \oplus S_2$ es compatible con las identificaciones $p \sim f(p)$ y $q \sim g(q)$ para $p, q \in \partial S_1$, luego induce un homeomorfismo $H : S_1 +_f S_2 \rightarrow S_1 +_g S_2$ entre los cocientes. Además es claro que $H(S_1) = S_1$.

(2) Ahora abordamos el caso general. Por el Lema 3.35 existen homeomorfismos $h_1 : S_1 \rightarrow S_1$ y $h_2 : S_2 \rightarrow S_2$ que preservan la orientación y tales que $h_1(\gamma_1) = \delta_1$ y $h_2(\gamma_2) = \delta_2$. Pongamos $g^* := h_2^{-1} \circ g \circ h_1|_{\gamma_1} : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, que también preserva la orientación. Para cualquier $p \in \partial S_1$ es $g \circ h_1(p) = h_2 \circ g^*(p)$, lo que implica que $h_1 \oplus h_2 : S_1 \oplus S_2 \rightarrow S_1 \oplus S_2$ es compatible con las identificaciones $p \sim g^*(p)$ y $q \sim g(q)$ para $p, q \in \partial S_1$, luego induce un homeomorfismo $H : S_1 +_{g^*} S_2 \rightarrow S_1 +_g S_2$ entre los cocientes. Además es claro que $H(S_1) = S_1$. Ahora se aplica el apartado (1) a f y g^* . \square

La Proposición se sigue de una aplicación inductiva del Lema 3.38, que puede formalizarse como describimos a continuación. Sea $\gamma^0, \dots, \gamma^t$ una enumeración de las aristas de Γ . Pongamos $E^{-1} := P \oplus Q$, y para cada $0 \leq k \leq t$ sea E^k el espacio obtenido a partir de E^{k-1} efectuando en él las identificaciones dadas por $p \sim f_{\gamma^k}(p)$. Es claro que hay identificaciones naturales $P, Q \subseteq E^{-1} \subseteq E^0 \subseteq \dots \subseteq E^t = P +_{(f_\gamma)} Q$ y que bajo esas identificaciones $\Delta_k := (P, Q)$ es una descomposición de E^k . Afirmamos que Δ_k es independiente (salvo equivalencia) de la elección de las aplicaciones f_γ . La afirmación es obviamente cierta para Δ_{-1} . Supuesta válida para Δ_{k-1} , veámoslo para Δ_k . Supongamos que $\gamma^k = p_{i_k} q_{j_k}$, y así la aplicación de pegado $f_{\gamma^k} : \gamma_1^k \rightarrow \gamma_2^k$ está

definida de una componente del borde de P_{i_k} en una componente del borde de Q_{j_k} . Ahora, sea S_1 la componente conexa de P_{i_k} en E^{k-1} , que es una pieza esférica porque $S_1 \subseteq E^{k-1} \subseteq P +_{(f_\gamma)} Q \cong \mathbb{S}^2$ por la Proposición 3.36. También Q_{j_k} es una pieza esférica por definición, y en virtud del Lema 3.38 se tiene que la descomposición (S_1, Q_{j_k}) de $S_1 +_{f_{\gamma^k}} Q_{j_k}$ no depende de f_{γ^k} . Por tanto tampoco la de E^k ni, por inducción, la de $E^t = P +_{(f_\gamma)} Q$. \square

En particular, de la proposición anterior se sigue que podemos abreviar la notación $\Delta_{(f_\gamma)}(\Gamma)$ a $\Delta(\Gamma)$. Con todos estos elementos ya podemos demostrar el resultado principal de este apartado.

Teorema 3.39. *Las aplicaciones Γ y Δ establecen una biyección*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de equivalencia} \\ \text{de descomposiciones} \\ \text{de la esfera} \end{array} \right\} \xrightleftharpoons[\Delta]{\Gamma} \left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de isomorfía} \\ \text{de árboles alternados} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Que Δ está unívocamente determinada es consecuencia de la Proposición 3.37. Además, Γ y Δ efectivamente llegan a los conjuntos señalados en el enunciado del teorema por las Proposiciones 3.32 y 3.36. Ya se señaló más arriba que descomposiciones equivalentes tienen asociados grafos isomorfos mediante Γ . Por otra parte, el efecto que sobre la construcción de $\Delta(\Gamma)$ tiene cambiar un grafo Γ por otro isomorfo es simplemente cambiar la familia de aplicaciones f_γ por otra, y ya sabemos por la Proposición 3.37 que esto no afecta a la clase de equivalencia de $\Delta(\Gamma)$. En consecuencia Γ y Δ , como aplicaciones entre clases de equivalencia de descomposiciones de la esfera y clases de isomorfía de árboles alternados, están bien definidas.

Es inmediato comprobar a partir de las definiciones que $\Gamma \circ \Delta = \text{id}$. Sólo queda, pues, demostrar que $\Delta \circ \Gamma = \text{id}$. Supongamos que $\Delta = (P, Q)$ es una descomposición de la esfera, y sea $\Gamma = \Gamma(\Delta)$ su grafo asociado que, recordemos, tiene un vértice p_i por cada componente P_i de P , un vértice q_j por cada componente Q_j de Q y una arista $p_i q_j$ si $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$. Entonces en la construcción de la descomposición asociada a Δ ya tenemos las piezas P_i y Q_j y también, para cada arista $\gamma = p_i q_j$ de $\Gamma(\Delta)$, una elección natural de γ_1 , γ_2 y $f_\gamma : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ que es $\gamma_1 = \gamma_2 = \partial P_i = \partial Q_j$ y $f_\gamma = \text{id}$. Evidentemente con estos datos la descomposición obtenida es precisamente (P, Q) . \square

3.6. Aplicación práctica al estudio de flujos

Teorema 3.40. *Sea K un compacto invariante aislado con shape trivial para un flujo continuo φ en una 3-variedad sin borde M . Si K no es un atractor ni un repulsor uniforme y $r := \text{rk } CH_2(K)$, $s := \text{rk } CH_1(K)$, las posibles clases de st -equivalencia para φ en torno a K están en biyección con las clases de isomorfía de árboles alternados con $r + 1$ p -vértices y $s + 1$ q -vértices.*

Demostración. Ya sabemos, por el Corolario 3.29, que las clases de st -equivalencia de flujos en torno a un compacto con *shape* trivial están en biyección con las clases de equivalencia de descomposiciones de la esfera. Además estas están en biyección, por el Teorema 3.39, con los árboles alternados. Sólo resta probar que los árboles con $r + 1$ p -vértices y $s + 1$ q -vértices están identificados precisamente con los flujos que tienen índice de Conley con los rangos prescritos r y s .

Sea N un bloque aislante regular para K . Como K no es un atractor ni un repulsor uniforme, tanto N^e como N^s son no vacíos (por ejemplo, si es $N^s = \emptyset$ entonces $N = N^+$ y N es un entorno aislante positivamente invariante de K , que por tanto es un atractor uniforme). Ahora, como N es contractible, de la sucesión exacta larga para el par (N, N^s)

$$H_1(N) = 0 \longrightarrow H_1(N, N^s) \longrightarrow H_0(N^s) \longrightarrow H_0(N) = \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(N, N^s) = 0$$

se tiene que $\text{rk } H_0(N^s) = \text{rk } H_1(N, N^s) + 1 = s + 1$. Análogamente $\text{rk } H_0(N^e) = \text{rk } H_1(N, N^e) + 1$. Pero $\text{rk } H_1(N, N^e) = \text{rk } H^1(N, N^e) = \text{rk } H_2(N, N^s) = r$, donde la primera igualdad se debe al teorema del coeficiente universal y la segunda al Teorema de dualidad de Lefschetz. En definitiva, N^e tiene $r + 1$ componentes conexas y N^s tiene $s + 1$ componentes conexas. Por tanto, el árbol $\Gamma(\ell(K))$ asociado a la descomposición $\ell(K)$ de la esfera tiene $r + 1$ p -vértices y $s + 1$ q -vértices.

Recíprocamente, sea Γ un árbol alternado con $r + 1$ p -vértices y $s + 1$ q -vértices. Si φ_Δ es cualquier modelo asociado la descomposición de la esfera $\Delta := \Delta(\Gamma) = (P, Q)$, el origen $K := \{0\}$ tiene índice de Conley $(S^0 * Q, *)$ en virtud del Teorema 3.28. Así $\text{rk } CH_1(K) = \text{rk } \tilde{H}_0(Q) = s$ (recuérdese que Q tiene una componente conexa por cada q -vértice de Γ) y $\text{rk } CH_1(K) = \text{rk } \tilde{H}^0(P) = r$. \square

Pongamos a continuación un ejemplo ilustrativo:

Ejemplo 3.41. Supongamos que $r = \text{rk } CH_2(K) = 2$ y $s = \text{rk } CH_1(K) = 3$, y enumeremos las posibles clases de st -equivalencia de flujos en torno a K . Esto lo haremos, en virtud del Teorema 3.40, estudiando los árboles alternados con 3 p -vértices y 4 q -vértices (y, por tanto, con 6 aristas).

(I) Supongamos que existe un p -vértice con valencia 4 (no puede haber p -vértices con mayor valencia porque entonces, como sólo hay 6 aristas, alguno de los p -vértices quedaría sin conectar). Entonces los restantes p -vértices tienen valencia 1 cada uno y existen dos posibilidades, descritas en la Figura 3.1.



Figura 3.1: con un p -vértice de valencia 4.

(II) Supongamos ahora que existe un p -vértice con valencia 3, otro con valencia 2 y el restante con valencia 1. Al colocar las primeras 5 aristas surgen aquí dos posibilidades a priori, que se muestran en la Figura 3.2.



Figura 3.2: con un p -vértice de valencia 3 (tentativa).

de las cuales la primera ha de ser descartada porque aparece un ciclo (o equivalentemente no puede completarse a un grafo conexo mediante la adición de una sexta arista).

La segunda posibilidad puede llevarse adelante y da lugar a los tres casos recogidos en la Figura 3.3.

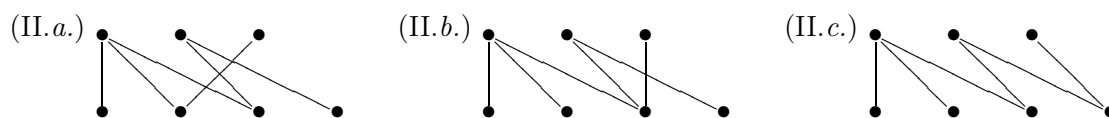


Figura 3.3: con un p -vértice de valencia 3.

(III) La última posibilidad es que todos los p -vértices tengan valencia 2. En esta situación se comprueba sin dificultad que las únicas situaciones que dan lugar a un árbol son las dos recogidas en la Figura 3.4.



Figura 3.4: con todos los p -vértices de valencia 2.

Puede comprobarse que los 7 grafos recogidos en las Figuras 3.1, 3.3 y 3.4 son no isomorfos entre sí, y en consecuencia son una enumeración completa de los posibles índices locales del flujo en torno a K . Es decir, hay exactamente 7 clases de st -equivalencia de flujos posibles en torno a K que tengan el índice de Conley prescrito.

Es interesante observar que en los grafos (II.a.) y (II.c.) los p -vértices tienen, en ambos, valencias 1, 2 y 3 mientras que los q -vértices tienen, en ambos, valencias 1, 1, 2 y 2. En consecuencia los dos grafos dan lugar a las mismas variedades de entrada y salida N^e y N^s , pero muestran que éstas pueden pegarse de dos maneras distintas para dar la esfera ∂N (y se corresponden con distintas clases de st -equivalencia).

Del Teorema 3.40 se sigue un interesante corolario:

Corolario 3.42. *Sea K un compacto con shape trivial en una 3-variedad M . Entonces:*

1. *El índice local $\ell(K)$ determina completamente el índice de Conley $h(K)$.*
2. *El índice $CH_*(K)$ determina, salvo un número finito de posibilidades, la clase de st -equivalencia del flujo en torno a K .*
3. *Sólo hay una cantidad numerable de clases de st -equivalencia de flujos en torno a un compacto invariante aislado con shape trivial.*

Demostración. (1) Se sigue del Teorema 3.16, porque $\ell(K)$ determina la clase de st -equivalencia del flujo en torno a K , y de la Proposición 3.15; pues $h(K)$ está completamente determinado por ésta.

(2) Se sigue del Teorema 3.40, porque sólo hay una cantidad finita de (clases de isomorfía) de árboles alternados con $r + 1$ p -vértices y $s + 1$ q -vértices.

(3) Es inmediato a partir de (2). □

3.7. Sobre la utilización de la Conjetura de Poincaré

Todo este capítulo ha hecho uso, de manera implícita, de la Conjetura de Poincaré en dimensión 3. Esta dependencia no puede eliminarse (salvo en casos especiales, como el discutido en el comentario posterior al Corolario 2.2), y para ilustrar este hecho incluimos aquí la siguiente

Proposición 3.43. *Se tiene que:*

1. *El Teorema 3.16 implica el Corolario 2.2.*
2. *El Corolario 2.2 implica la Conjetura de Poincaré en dimensión 3.*

Demostración. (1) Supongamos cierto el Teorema 3.16, y veamos cómo también debe ser cierto el Corolario 2.2. En efecto, sea K compacto invariante aislado con *shape* trivial para un flujo continuo φ en una 3-variedad M y tomemos N un bloque aislante regular para K en M . Sea también φ_Δ un modelo en \mathbb{R}^3 para la descomposición $\Delta = \ell(K)$ de la esfera (que $\ell(K)$ es ciertamente una descomposición de la esfera se sigue porque ∂N es una 2-esfera homológica, lo cual se calcula enseguida utilizando dualidad de Lefschetz y el hecho de que N tiene *shape* trivial) como los construidos en la sección 3.4 de este capítulo. Entonces $\{0\}$ es un compacto invariante aislado para φ_Δ con el mismo índice local que K , y además \mathbb{D}^3 es un bloque aislante regular suyo. Entonces el Teorema 3.16 y la Proposición 3.13 implican que existe una *st*-equivalencia de flujos $\mathbf{F} : N \longrightarrow \mathbb{D}^3$, y en particular N es una 3-celda.

(2) Supongamos ahora cierto el Corolario 2.2 y veamos cómo se sigue del mismo la Conjetura de Poincaré. Sea Σ una 3-esfera homológica simplemente conexa, es decir, Σ es una 3-variedad compacta simplemente conexa y con los grupos de homología de la 3-esfera. Seleccionemos un punto $p \in \Sigma$ y un entorno abierto U del mismo que sea homeomorfo a \mathbb{R}^3 . Puede definirse en Σ un flujo continuo que tenga a p por atractor estable con región de atracción U y tal que los puntos de $K := \Sigma - U$ sean todos fijos (por ejemplo, basta observar que, colapsando $\Sigma - U$ a un punto q , el espacio cociente $\overline{\Sigma}$ es la 3-esfera \mathbb{S}^3 con dos puntos distinguidos p y q . Aquí es trivial construir un flujo continuo en el que p es un atractor uniforme, con una base de bloques aislantes regulares que son todos 3-bolas, y q es su repulsor dual. Sólo resta transportar este flujo de vuelta a Σ mediante el Lema 2.6).

Si B es una bola positivamente invariante que contenga a p , $B^* := \Sigma - \text{int}(B)$ es un bloque aislante negativamente invariante de K , y por tanto regular (la inclusión de un repulsor uniforme como K en un entorno suyo negativamente invariante es siempre una equivalencia *shape*, véase al efecto el Lema 0.1). Además B^* es simplemente conexa (esto se deduce de inmediato del teorema de Seifert–van Kampen) y tiene la homología de \mathbb{R}^3 (aplíquese, por ejemplo, dualidad de Alexander). Por tanto, en virtud de los teoremas de Whitehead [78, 9 Theorem, p. 399] y [78, 24 Corollary, p. 405] B^* tiene homotopía trivial, y en consecuencia K tiene *shape* trivial. Ahora del Corolario 2.2 se sigue que K posee un base de bloques aislantes regulares que son bolas. Por otro lado, del Teorema 1.3 se deduce que dos bloques aislantes regulares cualesquiera de K son homeomorfos. En particular, B^* debe ser una 3-bola euclídea. En consecuencia, Σ es la unión de dos 3-bolas euclídeas por su borde y por ello es la 3-esfera. \square

3.8. Observaciones finales

Aunque si un compacto invariante aislado K no tiene *shape* trivial el índice local tenga por qué determinar la clase de *st*-equivalencia del flujo en torno al mismo, siempre que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ sea finitamente generado para $k = 0, 1$ (y en consecuencia haya existencia y unicidad de bloques aislantes regulares) puede, al menos, definirse el índice local. Este es un invariante más fino que el índice de Conley (ya lo hemos visto en el Ejemplo 3.41), y parece que pudiera ser de alguna utilidad en el estudio de flujos en 3-variedades. Además, no es difícil demostrar que la afirmación (2) del Corolario 3.42 sigue siendo cierta en este contexto más amplio: el índice cohomológico de K determina, salvo una cantidad finita de posibilidades, su índice local.

Una de las más importantes propiedades del índice de Conley es su invariancia por continuación, y resulta razonable preguntarse si el índice local también presentará alguna característica similar. A la espera de una investigación detallada sobre este extremo, por el momento podemos enunciar el siguiente

Corolario 3.44. *Sea φ_λ , con $\lambda \in [0, 1]$, una familia parametrizada de flujos continuos en una 3-variedad M . Supongamos que K_λ es una continuación de K_0 para φ_λ tal que $\text{Sh}(K_\lambda) = *$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Entonces hay una cantidad finita de clases de *st*-equivalencia a las cuales pertenecen los φ_λ en torno a K_λ .*

Demostración. El índice de Conley de cada K_λ es el mismo, y se aplica la parte (2) del Corolario 3.42. \square

Un problema con el índice local radica en que para su cálculo es necesario encontrar un bloque aislante regular. Sin embargo, siempre que N sea un bloque aislante de K tal que N^e y N^s sean 2-variedades, el par $\Delta := (N^e, N^s)$ es una descomposición de la superficie ∂N , y tiene sentido asignarle un grafo $\Gamma(\Delta)$ que se define exactamente igual que en el caso de descomposiciones de la esfera (aunque ahora no tiene por qué ser un árbol). Y se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.45. *Sean K un compacto invariante aislado para un flujo continuo en una 3-variedad sin borde M , y supongamos que $\text{rk } \check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0, 1$. Tomemos N bloque aislante de K tal que N^e y N^s sean 2-variedades, y finalmente pongamos $\Delta := (N^e, N^s)$. Entonces existe una aplicación de grafos alternados (es decir, que lleva p -vértices en p -vértices y q -vértices en q -vértices)*

$$e : \Gamma(\ell(K)) \longrightarrow \Gamma(\Delta)$$

tal que

$$\sum_{w \in e^{-1}(v)} |w| \geq |v|$$

para todo vértice $v \in \Gamma(\Delta)$ tal que $e^{-1}(v) \neq \emptyset$. Además, e es suprayectiva si, y sólo si, toda componente de N corta a K .

Demostración. Sea P un entorno regular de n^+ en $\text{int}(N^e)$, que existe por el mismo motivo que en la prueba del Teorema 1.2. Recuérdesse que en dicha demostración se obtenía un bloque aislante regular $[P, P'] \subseteq N_* \subseteq N$ añadiendo un collar exterior convexo a $[P, P']$, y las inclusiones $P \subseteq N_*^e$ y $P' \subseteq N_*^s$ eran equivalencias de homotopía. Se ve así que una componente de N_*^e y otra de N_*^s se cortan si, y sólo si, contienen un

par de puntos duales entre sí $p \in P$ y $p' \in P'$. Por tanto $\Gamma(\ell(K))$ se puede describir alternativamente como el grafo obtenido poniendo un p -vértice por cada componente de P , un q -vértice por cada componente de P' y uniéndolos por una arista si, y sólo si, sus componentes correspondientes contienen un par de vértices duales entre sí. Como siempre, denotaremos $(P \oplus P')_w$ a la componente de P ó P' asociada a un vértice $w \in \Gamma(\ell(K))$.

Dado cualquier vértice $w \in \Gamma(\ell(K))$, ponemos $e(w)$ el vértice que representa a la componente de N^e ó N^s que contenga a $(P \oplus P')_w$. Y comprobemos que satisface la desigualdad del enunciado. Para ello, sean $v \in \Gamma(\Delta)$ un (digamos) p -vértice fijo y C la componente de N^e que éste representa. Por construcción de $\Gamma(\Delta)$ existen $|v|$ componentes $D_1, \dots, D_{|v|}$ de N^s que cortan a C . Ahora, dado cualquier $p_i \in C \cap D_i$, como C es conexa y $e^{-1}(v)$ es no vacío (por tanto C contiene alguna componente de P), existen una componente P_i de P y un camino $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow C$ tales que $\gamma(0) = p_i$, $\gamma_i(1) \in \partial P_i$ y $\gamma_i([0, 1)) \subseteq C - n^+$. El camino dual γ'_i es entonces un conjunto conexo contenido en N^s , y como $\gamma'_i(0) = p'_i = p_i$, se deduce que $\text{im}(\gamma'_i) \subseteq D_i$. Entonces $\{\gamma_i(1), \gamma'_i(1)\}$ es un par dual con $\gamma'_i(1) \in D_i$, lo que prueba que entre todas las componentes $P_1, \dots, P_{|v|}$ (que están contenidas en C) suman al menos valencia $|v|$. Esto establece la fórmula del enunciado.

Por último, obsérvese que e es suprayectivo si, y sólo si, toda componente de N^e corta a P , o equivalentemente a n^+ puesto que la inclusión $n^+ \subseteq P$ es una equivalencia *shape*. Ahora, si C es una componente de N^e que no corta a n^+ entonces su dual C' es una componente de N^s que no corta a n^- , y $[C, C'] := \{p \in N : \pi^e(p) \in C\}$ es un abierto cerrado de N (por tanto una unión de componentes) que no corta a K . Esto concluye la prueba. \square

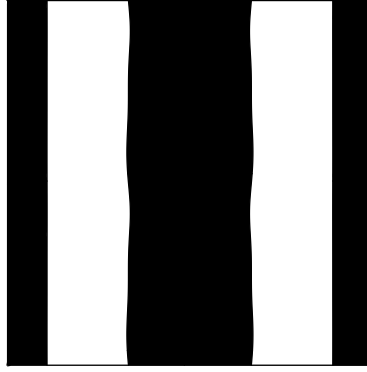
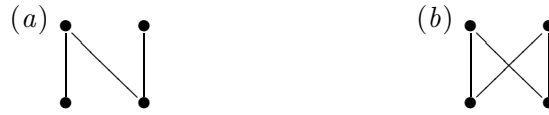
Terminaremos con un par de ejemplos que ilustran el tipo de información que se puede extraer de la Proposición 3.45.

Ejemplo 3.46. Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^3 (este ejemplo está tomado de [69]):

$$(S) \begin{cases} \dot{x} &= (x - y \cos \frac{x}{2})(x^2 + y^2) - x \\ \dot{y} &= (x + y)(x^2 + y^2) - y \\ \dot{z} &= -z \end{cases}$$

Como el campo vectorial de la derecha $f(x, y, z)$ es diferenciable en todo \mathbb{R}^3 , (S) da lugar a un flujo global bien definido. Sea N el toro sólido obtenido al rotar en torno al eje z un disco de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ centrado en $(1, 0, 0)$ y contenido en el plano xz . El conjunto de salida de N se ha calculado implementando un sencillo programa en Mathematica 5.2., y el resultado es el conjunto negro recogido en la Figura 3.5, donde ∂N se representa como un cuadrado con lados opuestos identificados.

Supongamos que $K := \text{inv}(N)$ tuviese *shape* trivial. Entonces $\Gamma(\ell(K))$ sería un árbol, y como $r = s = 1$, tendría 2 p -vértices y 2 q -vértices. Con estas condiciones sólo cabe una posibilidad, mostrada en la Figura 3.6.(a). Por otro lado, $\Gamma(\Delta)$, donde $\Delta = (N^e, N^s)$ es la descomposición del toro ∂N que se ve en la Figura 3.5, aparece representada en la Figura 3.6.(b):

Figura 3.5: Conjunto de salida (en negro) del toro N .Figura 3.6: $\Gamma(\ell(K))$ y $\Gamma(\Delta)$.

Como N es conexo y ciertamente $K \neq \emptyset$ (porque $h(K) \neq \emptyset$), e es suprayectiva. Pero entonces el p -vértice de valencia 1 de $\Gamma(\ell(K))$ constituiría por sí mismo la preimagen de alguno de los p -vértices de $\Gamma(\Delta)$, lo que contradice la desigualdad de la Proposición 3.45. Por tanto K no puede tener *shape* trivial.

Ejemplo 3.47. Con la notación de la Proposición 3.45, si K tiene *shape* trivial e índice de Conley nulo entonces $\Gamma(\Delta)$ consta tan sólo de un p -vértice y un q -vértice unidos entre sí, cualquiera que sea el bloque aislante N elegido.

Capítulo 4

Atractores sin explosiones externas

Introducción. Los atractores estables son bien conocidos desde el punto de vista dinámico y el topológico, en particular en lo que se refiere a sus propiedades *shape* (a este respecto pueden consultarse los artículos [8], [27], [29], [32], [41], [74] y [76], por citar algunos). En este capítulo exploraremos los atractores aislados que no poseen *explosiones externas*, introducidos en [3] y [4] y estudiados también en [54]. Nuestro enfoque estará inscrito en el marco que inauguramos en el primer capítulo, utilizando bloques aislantes regulares, pero con una definición un tanto más general (Definición 4.3) que es más natural en este nuevo contexto. No obstante, y en contraste con los capítulos anteriores, ahora estaremos especialmente interesados en las condiciones que la existencia de este tipo de atractores impone sobre la dinámica global. En esta línea van, por ejemplo, los Teoremas 4.16 o 4.34. Además, podremos obtener criterios geométricos para garantizar la estabilidad de atractores aislados en el plano (Corolario 4.30).

Gran parte de este capítulo está contenido en el *preprint* [70]. Además, este trabajo puede considerarse una continuación y ampliación de [54], aunque las técnicas utilizadas son distintas en ambos casos.

Sea $K \subseteq M$ un atractor aislado. Diremos que un punto $p \in \mathcal{A}(K)$ es un *punto de explosión* si $J^+(p) \not\subseteq K$ (esta noción *no* coincide con la presentada en [3]). Los atractores estables son precisamente aquellos que no tienen puntos de explosión en su región de atracción. Ahora, se tiene la siguiente definición (véase [3] y [54]):

Definición 4.1. Un atractor K se dirá que *sólo tiene explosiones internas* (o que *no tiene explosiones externas*) si es aislado y todo punto de explosión en $\mathcal{A}(K)$ pertenece a K . Es decir, $J^+(p) \subseteq K \ \forall p \in \mathcal{A}(K) - K$.

Esta clase de atractores es, por tanto, intermedia entre la de los atractores estables —que son bien conocidos— y los inestables (sin más calificativo), y se puede utilizar para estudiar ambos. Puede ser conveniente en este punto señalar que existen atractores inestables sin explosiones externas, como muestra el siguiente Ejemplo 4.2.

Ejemplo 4.2. Sea Z un espacio topológico compacto y definamos un flujo en $Z \times [-1, 1]$ haciendo que los puntos en $Z \times \{-1\}$ y $Z \times \{1\}$ sean fijos, mientras que los restantes fluyen “hacia arriba” desde $(z, -1)$ to $(z, 1)$. Ahora identifíquese $Z \times \{-1\}$ con $Z \times \{1\}$ del modo natural (es decir, $(z, -1) \sim (z, 1)$ para todo $z \in Z$) y llamemos M al espacio cociente resultante. Entonces $Z \cong Z \times \{-1\} \subseteq M$ es un atractor inestable en M que sólo tiene explosiones internas.

4.1. Bloques aislantes regulares para atractores sin explosiones externas

Esta primera sección presenta una versión de la Definición 1.1 adaptada al nuevo contexto que ahora nos interesa, en que el espacio de fases es una variedad topológica sin borde (pero sin restricción de dimensión) o, más generalmente, un ANR.

Definición 4.3. Sea K un compacto invariante aislado en un ANR M . Un bloque aislante N para K se dice que es *regular* si tanto N como N^e y N^s son ANR's y además la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia *shape*.

También aquí pueden obtenerse teoremas de existencia y unicidad de bloques aislantes regulares, porque la baja dimensión del espacio ambiente (que era la clave para la construcción en el Capítulo 1 y ahora ya no está presente) puede sustituirse por las fuertes restricciones dinámicas impuestas por el hecho de que K sea un atractor sin explosiones externas.

Teorema 4.4. Sea K un atractor sin explosiones externas en un ANR M . Entonces K posee una base de bloques aislantes regulares.

Demostración. Sea U un entorno de K en $\mathcal{A}(K)$ y tomemos un bloque aislante $N \subseteq U$ de K . Pongamos $N_* := N^+ \cup N^-$.

Aserto 1. N_* es abierto y cerrado en N .

Prueba. Que N_* es cerrado en N es claro, porque es la unión de los dos compactos N^+ y N^- . Que N_* es abierto quedará establecido en cuanto comprobemos que su complementario $N - (N^+ \cup N^-)$ es cerrado. Para ello, tomemos una sucesión $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N - (N^+ \cup N^-)$ que converja a algún $p \in N$, se trata de ver que $p \notin N^+ \cup N^-$.

Consideremos las sucesiones $\pi^e(p_k) \subseteq N^e$ y $\pi^s(p_k) \subseteq N^s$, que están bien definidas porque $p_k \notin N^+ \cup N^-$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En virtud de la compacidad de N^e y N^s podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\pi^e(p_k) \rightarrow q^e \in N^e$ y también $\pi^s(p_k) \rightarrow q^s \in N^s$. Puesto que, acudiendo a las definiciones, es inmediato ver que

$$\pi^s(p_k) = \pi^e(p_k) \cdot (t^s(p_k) - t^e(p_k)),$$

si fuese $p \in N_*$ entonces $t^s(p) = +\infty$ ó $t^e(p) = -\infty$ y en cualquier caso $t^s(p_k) - t^e(p_k) \rightarrow t^s(p) - t^e(p) = +\infty$, lo que implica que $q^s \in J^+(q^e)$ y contradice que K no tenga explosiones externas. Por tanto $p \notin N_*$ y se sigue que N_* es abierto en N .

Aserto 2. N_* es un bloque aislante de K .

Prueba. Que es compacto es claro, porque es cerrado en N . Que es entorno de K en M también, porque contiene a K y es abierto en N . Su invariante maximal es K puesto que $K \subseteq \text{inv}(N_*) \subseteq \text{inv}(N) = K$, y todo ello prueba que N_* es entorno aislante de K . Por otro lado, es fácil ver que $N_* = N_*^+ \cup N_*^-$, y esto implica que $\partial N_* = (\partial N_* \cap N_*^+) \cup (\partial N_* \cap N_*^-) = n_*^+ \cup n_*^-$, donde la unión es disjunta. Ahora, como N era bloque aislante, sucede que n_*^+ consta de puntos de entrada, pero no de salida, en N_* y n_*^- consta de puntos de salida, pero no de entrada, en N_* . Por tanto $N_*^e = n_*^+$, $N_*^s = n_*^-$ y N_* es bloque aislante de K .

Aserto 3. N_* es bloque aislante regular de K .

Prueba. Es necesario mostrar que tanto N_* como sus conjuntos de entrada y salida son ANR's. Además, hay que probar que la inclusión $K \subseteq N_*$ es una equivalencia *shape*.

Para ver que N_* es un ANR, será suficiente ver que es un ANR local ([37, Theorem 8.1., p. 98]). Si $p \in \text{int}(N_*)$, entonces el propio $\text{int}(N_*)$ es un entorno de p en N_* que es un ANR, porque es abierto en M , que lo es ([37, Proposition 7.9., p. 97]). Ahora, si $p \in \partial N_*$ entonces o bien $p \in n_*^+$ o bien $p \in n_*^-$, pero en cualquier caso por el Lema 1.7 existen un entorno V de p en ∂N_* y un número $\varepsilon > 0$ tales que $U := V \cdot (-\varepsilon, \varepsilon)$ es un entorno abierto de p en M (y por tanto un ANR) y $U \cap N_* = V \cdot [0, \varepsilon)$. Entonces V es un ANR, porque es un retracto del ANR U (lo que prueba que ∂N_* es un ANR local y por ello un ANR) y además $U \cap N \cong V \times [0, \varepsilon)$ es un entorno de p en N que es un ANR por ser producto de ANR's.

Sólo falta establecer que la inclusión $K \subseteq N_*$ es una equivalencia *shape*. Pero esto es una consecuencia inmediata del Lema 0.1 y el hecho de que $N_* = N_*^+ \cup N_*^-$. En efecto, el Lema 0.1 establece que existen sucesiones aproximativas $(r_k^+)_{k \in \mathbb{N}} : N_*^+ \rightarrow K$ y $(r_k^-)_{k \in \mathbb{N}} : N_*^- \rightarrow K$ tales que $r_k^+|_K = r_k^-|_K = \text{id}_K$, y puesto que $N_*^+ \cap N_*^- = K$, ambas pueden pegarse entre sí para dar lugar a una sucesión aproximativa $r_k := r_k^+ \cup r_k^- : N_* = N_*^+ \cup N_*^- \rightarrow K$ bien definida que también satisface $r_k|_K = \text{id}_K$. Esto último implica que $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una inversa *shape* para la inclusión $K \subseteq N_*$. \square

Corolario 4.5. *Todo atractor sin explosiones externas en un ANR M tiene el shape de un poliedro finito.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.4. \square

En [3, Theorem 3.7., p. 200] se demuestra que los grupos de cohomología de K son finitamente generados. Esto concuerda con la afirmación del Corolario 4.5 de que K tiene el *shape* de un poliedro finito.

Corolario 4.6. *El índice de Conley de un atractor sin explosiones externas en un ANR es del tipo de homotopía de un ANR compacto punteado.*

Demostración. Sea N un bloque aislante regular de K , que existe por el Teorema 4.4. Como tanto N como N^s son ANR's compactos, se tiene que N/N^s también lo es por [9, (9.1) Theorem., p. 116]. \square

De la demostración del Teorema 4.4 puede entresacarse la siguiente consecuencia, que será útil más adelante.

Proposición 4.7. *Sean K un atractor sin explosiones externas en un ANR y N un bloque aislante del mismo. Son equivalentes:*

1. N es un bloque aislante regular de K ,
2. la inclusión $K \subseteq N$ induce un isomorfismo $\check{H}^0(N) = \check{H}^0(K)$,
3. N es de la forma $N = N^+ \cup N^-$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Es inmediato de la definición de bloque aislante regular.

(2) \Rightarrow (3) Denotemos K_1, \dots, K_n las componentes de K (finitas en número por el Corolario 4.5). La hipótesis de que la inclusión $K \subseteq N$ induce un isomorfismo

$\check{H}^0(N) = \check{H}^0(K)$ equivale a que N tenga componentes N_1, \dots, N_n y cada una de ellas N_j contenga a su correspondiente K_j . En particular cada N_j es abierta y cerrada en N , y por ello un bloque aislante de K_j (el mismo argumento del Aserto 2. en la demostración del Teorema 4.4). Ahora, si consideramos $N_{j,*} := N_j^+ \cup N_j^-$, se sabe que éste es un bloque aislante regular de K_j que es abierto y cerrado en N_j (Asertos 1., 2. y 3. de la demostración del Teorema 4.4) y en consecuencia, como N_j es conexo, necesariamente $N_j = N_j^+ \cup N_j^-$. Así $N = N^+ \cup N^-$, lo que completa la prueba de esta implicación.

(3) \Rightarrow (1) Es el Aserto 3. en la demostración del Teorema 4.4. \square

El Teorema 4.4 tiene su correspondiente resultado de unicidad.

Teorema 4.8. *Sea K un atractor sin explosiones externas en un ANR M . Dados dos bloques aislantes regulares cualesquiera N_1 y N_2 de K , existe una equivalencia de flujos $h : N_1 \longrightarrow N_2$.*

Demostración. Al igual que en la prueba del Teorema 1.3, podemos suponer $N_1 \subseteq N_2$. Por la Proposición 4.7 se sabe que $N_1 = N_1^+ \cup N_1^-$ y $N_2 = N_2^+ \cup N_2^-$, y ello implica que N_1 es el cilindro $[n_1^+, n_1^-]$ y N_2 es el cilindro $[n_2^+, n_2^-]$. Ahora los Asertos 3. y 4. de la prueba del Teorema 1.3 se trasladan a esta nueva situación para establecer el resultado. \square

4.2. Descripción dinámica de la región de atracción

Queremos ahora probar el siguiente resultado, que da una descripción bastante completa de la dinámica en la región de atracción de un atractor sin explosiones externas:

Teorema 4.9. *Sea K un atractor sin explosiones externas en un ANR M . Entonces $\mathcal{A}(K) - K$ tiene una cantidad finita de componentes conexas C_1, \dots, C_s que se pueden numerar de modo que para algún $r \leq s$*

$$\hat{K} = \mathcal{H}(K) = K \bigcup (C_1 \cup \dots \cup C_r) \text{ y } \mathcal{A}(K) = \hat{K} \bigcup (C_{r+1} \cup \dots \cup C_s),$$

donde $\mathcal{H}(K)$ es el conjunto de puntos homoclínicos de K , es decir

$$\mathcal{H}(K) = \{p \in M : \emptyset \neq \omega(p), \alpha(p) \subseteq K\}.$$

Las componentes C_1, \dots, C_r (si $r \geq 1$) están enteramente compuestas de órbitas homoclínicas, y en consecuencia las denominaremos *componentes homoclínicas*. Las restantes componentes C_{r+1}, \dots, C_s se llamarán *componentes de atracción uniforme*. Si no hay componentes de atracción uniforme (esto es, si $r = s$) entonces K se llamará *puramente inestable*, lo cual es equivalente a afirmar que $\mathcal{A}(K) = \hat{K}$. Reservaremos en adelante para las letras r y s el significado que se les atribuye en el enunciado del Teorema 4.9.

Demostración. (del Teorema 4.9) Sea $\mathcal{A}(K) - K = \bigcup_{j \in J} C_j$ la descomposición de $\mathcal{A}(K) - K$ en sus componentes conexas. Para cualquier entorno aislante N de K contenido en $\mathcal{A}(K)$ se tiene que, como el conjunto compacto ∂N está contenido en $\bigcup_{j \in J} C_j$ y cada C_j es abierto porque M es localmente conexo, existen una cantidad finita de componentes C_1, \dots, C_s tales que $\partial N \subseteq \bigcup_{j=1}^s C_j$. Ahora mostraremos que cada componente

de $\mathcal{A}(K) - K$ debe cortar a ∂N , y esto implicará que de hecho $\mathcal{A}(K) - K = \bigcup_{j=1}^s C_j$. Sea C una componente de $\mathcal{A}(K) - K$ y supongamos que $C \cap \partial N = \emptyset$, de modo que o bien $C \subseteq N$ o bien $C \cap N = \emptyset$. El primer caso se puede descartar inmediatamente pues C es invariante (por ser una componente del conjunto invariante $\mathcal{A}(K) - K$) y, como N aísla a K , tendríamos $C \subseteq K$. El segundo caso también se puede descartar, porque para cualquier $p \in C$ es $\omega(p) \subseteq \overline{C}$, que es disjunto con K en la hipótesis de que $C \cap N = \emptyset$ y contradice que C esté contenido en $\mathcal{A}(K)$. Por tanto $\mathcal{A}(K) - K = \bigcup_{j=1}^s C_j$.

Aserto 1. Si $p \in \widehat{K} - K$ entonces $J^-(p) \subseteq K$.

Prueba. Puesto que M es un espacio Hausdorff localmente compacto, su compactificación con un punto M_∞ obtenida adjuntando el punto ideal ∞ a M es también Hausdorff. Además, el flujo en M se extiende a un nuevo flujo en M_∞ sin más que dejar ∞ como punto fijo. Denotaremos por $J_\infty^-(p)$ el conjunto prolongacional negativo de p en M_∞ , es decir

$$J_\infty^-(p) := \bigcap_{U \in \mathcal{E}_{M_\infty}(p), t \geq 0} \overline{U \cdot (-\infty, t]}^{M_\infty}.$$

Claramente $J_\infty^-(p) \cap M = J^-(p)$. Además, $J_\infty^-(p)$ es conexo (porque tiene un entorno compacto, M_∞) y corta a K . Para ver esto último, basta observar que $\alpha(p)$ es un compacto invariante no vacío contenido en K (y por tanto en $\mathcal{A}(K)$), de modo que eligiendo cualquier $q \in \alpha(p)$ se tiene que $\emptyset \neq \omega(q) \subseteq K \cap \alpha(p) \subseteq K \cap J_\infty^-(p)$. Ahora bien, $J_\infty^-(p)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{A}(K) - K$. En efecto, si existiese $q \in (\mathcal{A}(K) - K) \cap J_\infty^-(p)$ entonces, puesto que $q \in M$, tendríamos $q \in J^-(p)$ de modo que $p \in J^+(q)$. Pero este último conjunto está contenido en K por hipótesis, lo que contradice la elección de $p \notin K$ porque K no tiene explosiones externas. En consecuencia $J_\infty^-(p)$ es un conjunto conexo contenido en $\partial_{M_\infty} \mathcal{A}(K) \cup K$ y que corta a K pero no a $\mathcal{A}(K) - K$, luego necesariamente $J_\infty^-(p) \subseteq K$. En particular $J^-(p) = J_\infty^-(p) \cap M = J_\infty^-(p) \subseteq K$.

Aserto 2. $\widehat{K} = W^u(K)$.

Prueba. Como $K \subseteq \widehat{K}$, tenemos $W^u(K) \subseteq W^u(\widehat{K}) = \widehat{K}$, donde la última igualdad se debe a que \widehat{K} es estable. Para la otra inclusión, si $p \in \widehat{K}$ entonces $\emptyset \neq \alpha(p) \subseteq \widehat{K}$ (porque \widehat{K} es un compacto invariante) y, más aún, el Aserto 1. implica que $\alpha(p) \subseteq J^-(p) \subseteq K$ siempre que $p \notin K$. Por tanto $p \in W^u(K)$ si $p \in \widehat{K} - K$ y así (ya que trivialmente $K \subseteq W^u(K)$) se concluye que $\widehat{K} \subseteq W^u(K)$.

En particular, del Aserto 2. se sigue que $\widehat{K} = \mathcal{H}(K)$ sin más que observar que $\mathcal{H}(K) = W^u(K)$. Para acabar la prueba del teorema sólo queda comprobar que toda componente de $\mathcal{A}(K) - K$ o bien está contenida en $\widehat{K} - K$ o bien es disjunta con \widehat{K} . Si $p \in \widehat{K} - K$, por el Aserto 1. es $J^-(p) \subseteq K$ y existen $t \in \mathbb{R}$ y $U \in \mathcal{E}_M(p)$ tales que $U \cdot (-\infty, -t] \subseteq N$ ya que N es un entorno compacto de K y en consecuencia de $J^-(p)$. Esto implica que $\emptyset \neq \alpha(q) \subseteq N$ para todo $q \in U$, y así $\emptyset \neq \alpha(q) \subseteq K$ porque N aísla a K , de modo que $U \subseteq W^u(K) = \widehat{K}$ y se concluye que $\widehat{K} - K$ es abierto en $\mathcal{A}(K) - K$. Como además es claramente cerrado en $\mathcal{A}(K) - K$ también, cualquier componente de $\mathcal{A}(K) - K$ debe o bien estar contenida en \widehat{K} o ser disjunta con el mismo. Una reordenación adecuada permite suponer que C_1, \dots, C_r son las componentes que están en la primera situación (es decir, contenidas en $\widehat{K} = \mathcal{H}(K)$) y C_{r+1}, \dots, C_s las que están en la segunda situación (disjuntas con \widehat{K}). Por tanto $\mathcal{A}(K) - \widehat{K} = \bigcup_{j=r+1}^s C_j$ y $\widehat{K} - K = \mathcal{H}(K) - K = \bigcup_{j=1}^r C_j$. \square

El siguiente corolario es inmediato:

Corolario 4.10. *Mantenemos la misma notación e hipótesis del Teorema 4.9.*

1. K es inestable si, y sólo si, $r \geq 1$.
2. Si M es conexo y K es puramente inestable, entonces K es un atractor global (es decir, $\mathcal{A}(K) = M$) y el espacio de fases M es compacto.
3. Recíprocamente, si M es compacto entonces cualquier atractor con sólo explosiones internas K que sea global y conexo es puramente inestable.

Demostración. (1) De otro modo, $\widehat{K} = K$.

(2) $\mathcal{A}(K) = \widehat{K}$ es abierto (siendo una región de atracción) y cerrado (siendo \widehat{K} compacto) en el conexo M , luego $M = \mathcal{A}(K) = \widehat{K}$. En particular M es compacto.

(3) Su estabilización \widehat{K} es un atractor estable cuya región de atracción es compacta, lo que exige que $\widehat{K} = M$ e implica que K es puramente inestable. \square

Para acabar esta sección probaremos el siguiente resultado, que se refiere al borde de un bloque aislante regular y será la vía a través de la cual explotaremos la existencia de los mismos en las secciones siguientes:

Proposición 4.11. *Sea K es un atractor sin explosiones externas en un ANR M . Si N es un bloque aislante regular suyo, ∂N tiene una cantidad finita de componentes conexas $n_1^-, \dots, n_r^- \subseteq N^-$ y $n_1^+, \dots, n_r^+, \dots, n_s^+ \subseteq N^+$ que satisfacen:*

1. para cada componente homoclínica C_j de $\mathcal{A}(K) - K$, tanto n_j^- como n_j^+ son secciones topológicas de C_j ,
2. para cada componente de atracción uniforme C_j de $\mathcal{A}(K) - K$, n_j^+ es una sección topológica de C_j .

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{A}(K) - K$ es paralelizable, y para ello es suficiente probar que $J^+|_{\mathcal{A}(K)-K}(p) = \emptyset$ para todo $p \in \mathcal{A}(K) - K$ (véanse [7, 1.8 Theorem., p. 47] y [7, 2.6 Theorem., p. 49]). Ahora bien,

$$J^+|_{\mathcal{A}(K)-K}(p) = \bigcap_{\substack{t \geq 0 \\ U \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}(K)-K}(p)}} \overline{U \cdot [t, +\infty)}^{\mathcal{A}(K)-K}$$

y, como $\mathcal{A}(K) - K$ es abierto en M , se tiene también

$$J^+|_{\mathcal{A}(K)-K}(p) = \bigcap_{\substack{t \geq 0 \\ U \in \mathcal{E}_M(p)}} \overline{U \cdot [t, +\infty)}^{\mathcal{A}(K)-K}.$$

Como por otro lado $\overline{U \cdot [t, +\infty)}^{\mathcal{A}(K)-K} = \overline{U \cdot [t, +\infty)}^M \cap (\mathcal{A}(K) - K)$, se concluye que

$$J^+|_{\mathcal{A}(K)-K}(p) = J^+(p) \cap (\mathcal{A}(K) - K) = \emptyset,$$

ya que $J^+(p) \subseteq K$ por hipótesis para todo $p \in \mathcal{A}(K) - K$. Por tanto $\mathcal{A}(K) - K$ es paralelizable.

Si $p \in C_j$ con $1 \leq j \leq r$ (p pertenece a una componente homoclínica) entonces es $\emptyset \neq \alpha(p) \subseteq K$ y como N es entorno de K , existe t tal que $p \cdot (-\infty, t] \subseteq N$. Pongamos

$q := \pi^s(p \cdot t)$, de modo que $q \in N^-$ y así $q \in n^-$, lo cual prueba que la trayectoria de p corta a n^- al menos una vez. Además, si $q_1 \neq q_2$ fuesen puntos de corte de $p \cdot \mathbb{R}$ con n^- , podemos suponer $q_2 = q_1 \cdot t$ con $t \geq 0$ y por ser N bloque aislante se tendría que $q_1 \in q_2 \cdot (-\infty, 0) \subseteq \text{int}(N)$, lo cual es imposible a no ser $t = 0$, de donde $q_1 = q_2$. Por tanto q es el único punto de corte de $p \cdot \mathbb{R}$ con n^- y se concluye que n^- es sección conjuntista de $\hat{K} - K$. Como además n^- es compacto y se sabe que $\hat{K} - K$ es paralelizable (porque es un subconjunto invariante de $\mathcal{A}(K) - K$, que ya se ha comprobado arriba que lo es), se deduce que n^- es una sección topológica de $\hat{K} - K$. La restricción del flujo $\varphi|_{n^- \times \mathbb{R}} : n^- \times \mathbb{R} \rightarrow \hat{K} - K$ es por tanto un homeomorfismo y, como $\hat{K} - K$ tiene r componentes conexas C_1, \dots, C_r , también n^- debe tener r componentes n_1^-, \dots, n_r^- que se pueden etiquetar de manera que cada n_j^- sea una sección de C_j .

Un argumento completamente análogo al empleado para n^- puede hacerse con n^+ y completa la demostración de la proposición. \square

Athanassopoulos introdujo en [4] una clasificación de atractores aislados K en términos de un número ordinal, llamado por él *instability depth* del atractor. Mide la complejidad del flujo en $\mathcal{A}(K) - K$, y en particular los atractores con explosiones sólo internas son precisamente aquellos con la menor *instability depth* (exceptuando los atractores estables), aunque no probaremos esta afirmación (no es difícil). Esto formaliza la afirmación, que hacíamos más arriba, de que exhiben la forma más débil de inestabilidad posible.

4.3. Propiedades cohomológicas de los atractores sin explosiones externas. Relaciones con su región de atracción

En esta sección iniciamos un análisis de naturaleza más geométrica de los atractores sin explosiones externas. En concreto, estableceremos algunas propiedades cohomológicas básicas de los mismos y de cómo yacen en su región de atracción. En adelante M será una n -variedad sin borde R -orientable.

Proposición 4.12. *Sea K un atractor sin explosiones externas en una n -variedad M sin borde y R -orientable. Si N es un bloque aislante regular para K contenido en $\mathcal{A}(K)$, entonces:*

1. $H^k(N, \partial N; R) = H_{n-k}(N; R)$ (dualidad de Lefschetz para N),
2. $H^k(n^-; R) = H_{n-1-k}(n^-; R)$ (dualidad de Poincaré para n^-).

De ahora en adelante, y sin mencionarlo explícitamente, utilizaremos indistintamente las teorías de homología y cohomología singular y de Čech sobre N y ∂N , porque al ser estos conjuntos ANR's ambas coinciden.

Demostración. Los coeficientes se toman en R .

- (1) Por dualidad de Alexander en la n -variedad $\mathcal{A}(K)$ se tiene

$$H^k(N, \partial N) = H_{n-k}(\mathcal{A}(K) - \partial N, \mathcal{A}(K) - N).$$

Como $\mathcal{A}(K)$ es un entorno abierto del compacto N , $\mathcal{A}(K) - \partial N = \text{int}(N) \cup \mathcal{A}(K) - N$, donde la unión es disjunta y ambos conjuntos son abiertos. Por tanto

$$H_{n-k}(\mathcal{A}(K) - \partial N, \mathcal{A}(K) - N) = H_{n-k}(\text{int}(N)).$$

Ahora, se sigue del Lema 0.1 que la inclusión $K \subseteq \text{int}(N)$ es una equivalencia *shape*, y como $K \subseteq N$ también lo es por ser N regular, $\text{int}(N) \subseteq N$ es una equivalencia *shape* y por tanto de homotopía (ya que N es un ANR por definición y $\text{int}(N)$ también es un ANR por ser abierto en M). Así $H_{n-k}(\text{int}(N)) = H_{n-k}(N)$, lo que concluye la prueba de esta parte.

(2) Sea $C = \widehat{K} - K = n^- \cdot \mathbb{R}$, que es una n -variedad R -orientable porque es abierta en $\mathcal{A}(K)$ en virtud del Teorema 4.9. El par (C, n^-) es homeomorfo a $(n^- \times (-1, 1), n^- \times \{0\})$ puesto que n^- es una sección de C (Proposición 4.11). En consecuencia

$$H_k(C, C - n^-) = H_k(n^- \times [-1, 1], n^- \times \{-1, 1\}),$$

y este último grupo es isomorfo a $H_{k-1}(n^-)$ por el Lema 4.13:

Lema 4.13. *Para cualquier espacio topológico X , $H_k(X \times [-1, 1], X \times \{-1, 1\}; R) = H_{k-1}(X; R)$. La misma afirmación es cierta en cohomología.*

Demostración. Es una sencilla aplicación de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris. En concreto, considérense los pares $(X \times [-1, 1], X \times \{-1\})$ y $(X \times [-1, 1], X \times \{1\})$, que son abiertos en el par $(X \times [-1, 1], X \times \{-1, 1\})$. Puesto que las inclusiones $X \times \{-1\} \subseteq X \times [-1, 1]$ y $X \times \{1\} \subseteq X \times [-1, 1]$ son equivalencias de homotopía, ambos pares tienen homología nula en todas las dimensiones. Además, su intersección es $(X \times [-1, 1], \emptyset)$, cuya homología es isomorfa a la de X . Por tanto la sucesión de Mayer-Vietoris queda

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_k(X \times [-1, 1], X \times \{-1, 1\}) \longrightarrow H_{k-1}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

y de aquí es inmediato el resultado. Para cohomología vale el mismo argumento. \square

Por dualidad de Alexander $H_k(C, C - n^-) = H^{n-k}(n^-)$, lo que junto con la igualdad $H_k(C, C - n^-) = H_{k-1}(n^-)$ establecida a través del Lema 4.13 implica que $H_k(n^-) = H^{(n-1)-k}(n^-)$ y concluye la prueba de la proposición. \square

Proposición 4.14. *Sea K un atractor conexo, inestable, y sin explosiones externas en una n -variedad R -orientable M . Entonces:*

1. $\check{H}^k(K; R) = 0$ para $k \geq n$,
2. $r \leq s \leq \text{rk } \check{H}^{n-1}(K; R)$,

donde s es el número total de componentes en $\mathcal{A}(K) - K$ y r es el número de componentes homoclínicas en $\mathcal{A}(K) - K$.

Demostración. Tomamos coeficientes en R .

(1) Aquí la dinámica no es, realmente, relevante. Por dualidad de Alexander $\check{H}^k(K) = H_{n-k}(\mathcal{A}(K), \mathcal{A}(K) - K)$. Para $k > n$ tenemos, trivialmente, $H_{n-k}(M, M - K) = 0$. Para $k = n$, recordando que $\mathcal{A}(K)$ es conexo porque K lo es, se sigue que $H_0(\mathcal{A}(K), \mathcal{A}(K) - K) = 0$ ya que $\mathcal{A}(K) - K \neq \emptyset$ (como K es inestable, $K \neq \bar{K} \subseteq \mathcal{A}(K)$).

(2) Bastará ver que $s \leq \text{rk } \check{H}^{n-1}(K)$. Sea N un bloque aislante regular para K , y recuérdese que por la Proposición 4.11 r es el número de componentes de n^- y s es el número de componentes de n^+ . Ahora, por la sucesión exacta larga del triple $(N, \partial N, n^-)$ en cohomología y el hecho de que $H^0(N, n^-) = 0$ porque N es conexo y $n^- \neq \emptyset$ porque K es inestable, se tiene

$$\dots \longleftarrow H^1(N, \partial N) \longleftarrow H^0(\partial N, n^-) \longleftarrow H^0(N, n^-) = 0 \longleftarrow \dots$$

lo que implica que $\text{rk } H^0(\partial N, n^-) \leq \text{rk } H^1(N, \partial N)$. Ahora $\partial N = n^+ \cup n^-$ y por tanto $H^0(\partial N, n^-) = H^0(n^+)$ tiene rango s . Utilizando la dualidad de Lefschetz en N (Proposición 4.12) es $H^1(N, \partial N) = H_{n-1}(N)$, de modo que $s \leq \text{rk } H_{n-1}(N)$. Ahora se tiene que

$$\text{rk } H_{n-1}(N) = \text{rk } H^{n-1}(N) = \text{rk } \check{H}^{n-1}(N),$$

donde la primera igualdad se debe al teorema del coeficiente universal y la segunda a que N es un ANR. Finalmente, la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia *shape* porque N es bloque aislante regular de K , de donde $s \leq \text{rk } \check{H}^{n-1}(K)$. \square

Nótese en particular que entonces $\text{rk } \check{H}^{n-1}(K) \geq 1$ y así $\dim(K) \geq n - 1$. Esto se probó en [4, Theorem 4.5, p. 166] bajo la hipótesis de que el flujo fuese diferenciable.

Corolario 4.15. *En las hipótesis de la Proposición 4.14, si $\text{rk } \check{H}^{n-1}(K; R) = 1$ entonces K es un atractor global. Además, $r = 1$ y M es compacta si es conexa.*

Demostración. Por la Proposición 4.14 tenemos $1 \leq r \leq s \leq \text{rk } \check{H}^{n-1}(K; R)$, de modo que $r = s = 1$. Existe entonces una única componente homoclínica porque $r = 1$, pero además la igualdad $r = s$ implica por el Teorema 4.9 que $\mathcal{A}(K) = \hat{K}$. En virtud del Corolario 4.10 se tiene que K es un atractor global y M es compacta si es conexa. \square

Es un hecho bien conocido que para un atractor estable K la inclusión $K \subseteq \mathcal{A}(K)$ es una equivalencia *shape* (véanse por ejemplo [8], [27], [29], [32], [41], [74], [76] y el comentario que sigue al Lema 0.1) y así el polinomio $p(\mathcal{A}(K), K)$ es trivial. Cuando, más en general, K no tiene explosiones externas, se verifica el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sea K un atractor sin explosiones externas en una n -variedad R -orientable M . Entonces el polinomio $p(\mathcal{A}(K), K; R)$ tiene la estructura simétrica*

$$p(\mathcal{A}(K), K; R) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t^2 + a_n t,$$

con todos los coeficientes finitos. Además $a_n = r$, donde r es el número de componentes homoclínicas en $\mathcal{A}(K) - K$.

Demostración. Sea N un bloque aislante regular para K (ver Teorema 4.4). Tomamos coeficientes en R .

Sea $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ un entorno compacto y positivamente invariante de \hat{K} . Hay una retracción por deformación fuerte de $\mathcal{A}(K)$ sobre P , lo que prueba que $(P, K) \subseteq (\mathcal{A}(K), K)$ es una equivalencia de homotopía. El Lema 0.1 implica que $(\hat{K}, K) \subseteq (P, K)$ es una equivalencia *shape*, y de todo ello se deduce que $(\hat{K}, K) \subseteq (\mathcal{A}(K), K)$ lo es a su vez. Por tanto $p(\mathcal{A}(K), K) = p(\hat{K}, K)$. Para continuar necesitamos el siguiente Lema auxiliar:

Lema 4.17. *Si (X_1, A_1) y (X_2, A_2) son pares compactos tales que $X_1 - A_1 \cong X_2 - A_2$, entonces $p(X_1, A_1; R) = p(X_2, A_2; R)$.*

Demostración. Denotando $\pi : (X_1, A_1) \longrightarrow (X_1/A_1, A_1/A_1)$ la proyección canónica, por [78, 5. Theorem, p. 318] tenemos que π^* es un isomorfismo, luego $p(X_1, A_1) = p(X_1/A_1, A_1/A_1)$ y por la misma razón $p(X_2, A_2) = p(X_2/A_2, A_2/A_2)$. Claramente X_1/A_1 es una compactificación con un punto de $X_1 - A_1$ (donde el punto del infinito es A_1/A_1) y también X_2/A_2 es una compactificación con un punto de $X_2 - A_2$ (donde el punto del infinito es A_2/A_2). Ahora bien, puesto que $X_1 - A_1 \cong X_2 - A_2$, la unicidad de la compactificación con un punto implica que existe un homeomorfismo $h : (X_1/A_1, A_1/A_1) \longrightarrow (X_2/A_2, A_2/A_2)$. En consecuencia $p(X_1, A_1) = p(X_1/A_1, A_1/A_1) = p(X_2/A_2, A_2/A_2) = p(X_2, A_2)$. \square

De la Proposición 4.11 se sigue que $\widehat{K} - K = n^- \cdot \mathbb{R}$, que es homeomorfo a $n^- \cdot (-1, 1) = n^- \cdot [-1, 1] - n^- \cdot \{-1, 1\}$. Utilizando el Lema 4.17 obtenemos

$$p(\mathcal{A}(K), K) = p(n^- \cdot [-1, 1], n^- \cdot \{-1, 1\}) = tp(n^-),$$

donde la última igualdad se debe al Lema 4.13. En particular $p(\mathcal{A}(K), K)$ tiene coeficientes finitos porque n^- en un ANR.

Por el teorema del coeficiente universal, la parte libre de $H^k(n^-)$ es isomorfa a la parte libre de $H_k(n^-)$. Esto implica que ambos tienen el mismo rango $p^k(n^-)$, y por la relación de dualidad establecida en la segunda parte del Proposición 4.12 dicho rango coincide con $p^{(n-1)-k}(n^-)$. En consecuencia $p(n^-)$ es simétrico y la igualdad $p(\mathcal{A}(K), K) = tp(n^-)$ demostrada en el párrafo anterior implica que también $p(\mathcal{A}(K), K)$ lo es. Finalmente, debido a esta simetría, el coeficiente a_n de $p(\mathcal{A}(K), K)$ es $p^0(n^-)$, el número de componentes conexas de n^- o equivalentemente el número de componentes homoclínicas en $\mathcal{A}(K) - K$. \square

Así, el polinomio $p(\mathcal{A}(K), K)$ puede ser o bien nulo (si K es estable) o tener grado máximo $n = \dim(M)$ si K es inestable. Esto proporciona un método para detectar explosiones externas, como se muestra en el siguiente Ejemplo 4.18 (compárese también con el Teorema 4.34):

Ejemplo 4.18. Sea $K \subseteq \mathbb{T}^3$ un atractor inestable aislado con el *shape* de \mathbb{S}^2 . Entonces K debe tener explosiones externas.

Demostración. La prueba consistirá en suponer que K no tiene explosiones externas, calcular $p(\mathcal{A}(K), K)$ y ver que no tiene la estructura simétrica dada por el Teorema 4.16 (todos los coeficientes se toman en \mathbb{Z}). Puesto que $\check{H}^2(K) = \mathbb{Z}$, se tiene $r = s = 1$ y en consecuencia K es puramente inestable y un atractor global (Corolario 4.15). Por tanto $p(\mathcal{A}(K), K) = p(\mathbb{T}^3, K) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t$ para algunos enteros no negativos a_1, a_2, a_3 de los que ya sabemos que $a_3 = a_1 = r = 1$ (Teorema 4.16). De la sucesión exacta del par (\mathbb{T}^3, K) y utilizando que $\check{H}^1(K) = 0$ se sigue que $\check{H}^1(\mathbb{T}^3, K) = \check{H}^1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$, luego $p(\mathcal{A}(K), K) = t^3 + a_2 t^2 + 3t$ y esto contradice la simetría exigida por el Teorema 4.16. \square

El siguiente Corolario resultará de utilidad más adelante.

Corolario 4.19. Sea K un atractor sin explosiones externas en una variedad M sin borde y de dimensión par. Entonces $\chi(\mathcal{A}(K)) = \chi(K)$.

Demostración. Tomando coeficientes $R = \mathbb{Z}_2$, de modo que M sea ciertamente R -orientable, por la simetría de $p(\mathcal{A}(K), K)$ establecida en el Teorema 4.16 se tiene que $\chi(\mathcal{A}(K), K) = 0$. De aquí $\chi(\mathcal{A}(K)) = \chi(K) + \chi(\mathcal{A}(K), K) = \chi(K)$. \square

No es difícil ver que, si la dimensión de M no es par, el Corolario 4.19 no tiene por qué ser cierto.

En [29, Theorem 2., p. 327] se prueba que un compacto finito dimensional K con el *shape* de un poliedro compacto puede encajarse en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n de manera que sea un atractor estable para algún flujo adecuado. Resulta razonable preguntarse si lo mismo es cierto, ahora exigiendo que K sea un atractor inestable con sólo explosiones externas (aunque habrán de considerarse encajes de K en variedades arbitrarias, no solamente \mathbb{R}^n , en virtud del Ejemplo 4.26 más adelante). A continuación respondemos esta pregunta en sentido negativo con el Ejemplo 4.20, obteniendo así el resultado de que existen compactos que, debido tan sólo a su geometría, deben tener explosiones externas cuando se encajan como atractores inestables en alguna variedad.

Ejemplo 4.20. Considérese la suma *wedge* $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea K una 3-variedad compacta con borde que contenga a $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ y tal que la inclusión del mismo en K sea una equivalencia de homotopía (por ejemplo, como K puede elegirse un entorno regular de $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ en \mathbb{R}^3). Afirmamos que K no se puede encajar en ninguna variedad sin borde M como atractor inestable sin explosiones externas.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supondremos que M es conexa (esto no supone pérdida de generalidad, porque K es conexo). Tomando coeficientes en \mathbb{Z}_2 , es inmediato comprobar que $\check{H}^0(K) = \check{H}^1(K) = \check{H}^2(K) = \mathbb{Z}_2$, mientras que el resto de los grupos de cohomología son triviales. Denotaremos por $S, L \subseteq \text{int}(K)$ copias de $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ ligeramente desplazadas para hacerlas disjuntas. Los homomorfismos inducidos por inclusión $H^2(K) \rightarrow H^2(S)$ y $H^1(K) \rightarrow H^1(L)$ son isomorfismos, y también en homología. Así, S y L son representantes geométricos de la (co)homología de K .

Pongamos $m = \dim(M)$ por brevedad. Entonces $m \geq 3$ puesto que $\check{H}^k(K)$ debe ser trivial para $k \geq m$ por la Proposición 4.14 y, por otro lado, $m \leq 3$ ya que $\check{H}^{m-1}(K)$ debe ser no nulo (de nuevo por la misma proposición). Por tanto $m = 3$. Además, el Corolario 4.15 implica que K es un atractor global porque $\text{rk } \check{H}^2(K) = 1$, y en particular M es compacto y $r = 1$.

A continuación calculamos $p(\mathcal{A}(K), K) = p(M, K)$. Por el Teorema 4.16 se ve que $p(M, K) = t^3 + at^2 + t$ para algún $a \geq 0$, y evaluando esta igualdad en $t = -1$ debe ser $\chi(M, K) = -2 + a$. Es una consecuencia bien conocida de la dualidad de Poincaré que $\chi(M) = 0$ porque M es una 3-variedad compacta sin borde, y un cálculo directo muestra que $\chi(K) = 1$. Así $-2 + a = \chi(M, K) = \chi(M) - \chi(K) = -1$ y por ello $a = 1$, luego $p(M, K) = t^3 + t^2 + t$.

Sea N un bloque aislante regular para K contenido en $\mathcal{A}(K)$. Entonces N es una 3-variedad compacta: véanse el Lema 1.8, que asegura que cada punto de $\text{int}_{\partial N}(N^e)$ (y también cualquiera en $\text{int}_{\partial N}(N^s)$) posee un entorno en N homeomorfo a \mathbb{H}^3 , y obsérvese que $\partial N = \text{int}_{\partial N}(N^e) \cup \text{int}_{\partial N}(N^s)$ porque tanto N^e como N^s son abiertos y cerrados en ∂N ya que $N^e = n^+$ y $N^s = n^-$. En particular ∂N es la unión disjunta de las superficies compactas y sin borde n^- y n^+ , que son homeomorfas entre sí porque ambas son secciones de $M - K$ (véase al efecto la Proposición 4.11). Más aún, $p(M, K) = tp(n^-)$ (revíse la demostración del Teorema 4.16), luego $p(n^-) = t^2 + t + 1$ y, como la única superficie que tiene este polinomio de Poincaré es \mathbb{RP}^2 , el plano proyectivo, se sigue que ∂N es la unión disjunta de dos de tales planos.

$S \cong \mathbb{S}^2$ posee un pequeño entorno abierto $U \cong \mathbb{S}^2 \times (-1, 1) \subseteq \text{int}(K) \subseteq \text{int}(N)$ cuya frontera ∂U es la unión disjunta de dos copias de \mathbb{S}^2 . Probaremos que la 3-variedad

compacta $N - U$ (con borde $\partial N \cup \partial U$) tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales tiene un borde que consta de una 2-esfera (que proviene de ∂U) y un plano proyectivo \mathbb{RP}^2 (que proviene de ∂N). Pero esto no es posible, porque el borde de una variedad de dimensión impar (como una cualquiera de las componentes de $N - U$) debe tener característica de Euler par (esto es una consecuencia inmediata de la dualidad de Lefschetz) pero $\chi(\mathbb{S}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) = 3$. Esta será la contradicción que demostrará que nuestra hipótesis de que K es un atractor inestable sin explosiones externas en M es insostenible.

Aserto 1. Hay un isomorfismo $H_1(N, \partial N) = H_1(N, N - S)$ inducido por la inclusión.

Prueba. Sea \hat{N} la variedad N a la que se ha agregado un pequeño collar exterior abierto en ∂N . Las inclusiones $K \subseteq N$ y $N \subseteq \hat{N}$ son equivalencias de homotopía, y así el homomorfismo inducido por inclusión $H^2(N) \rightarrow H^2(S)$ es un isomorfismo. Por dualidad de Alexander en la variedad sin borde \hat{N} , y sus propiedades de naturalidad, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^2(N) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S) = \mathbb{Z}_2 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_1(\hat{N}, \hat{N} - N) & \longrightarrow & H_1(\hat{N}, \hat{N} - S) \end{array}$$

del que se deduce que la flecha inferior es también un isomorfismo. Ahora, $(\hat{N}, \hat{N} - N)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $(\hat{N}, \hat{N} - \text{int}(N))$, y a su vez éste retracts por deformación fuerte sobre $(N, \partial N)$. Puesto que $(\hat{N}, \hat{N} - S)$ es llevado sobre $(N, N - S)$ por esta deformación, concluimos que el homomorfismo inducido por inclusión $H_1(N, \partial N) \rightarrow H_1(N, N - S)$ es un isomorfismo.

Aserto 2. Toda componente de $N - U$ corta a ∂N .

Prueba. Basta examinar la sucesión exacta del triple $(N, N - S, \partial N)$

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_1(N, \partial N) &\xrightarrow{\cong} H_1(N, N - S) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_0(N - S, \partial N) \longrightarrow H_0(N, \partial N) = 0, \end{aligned}$$

de donde $H_0(N - S, \partial N) = 0$ y por tanto toda componente de $N - S$ debe cortar a ∂N . Luego también toda componente de $N - U$ corta a ∂N .

Aserto 3. $N - U$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Prueba. Como $N - U$ retracts por deformación fuerte sobre $N - S$, será suficiente mostrar que este último tiene dos componentes conexas. Las inclusiones $L \subseteq N - S \subseteq N$ dan lugar, en homología, a la composición $H_1(L) \rightarrow H_1(N - S) \rightarrow H_1(N)$, de la cual sabemos que es un isomorfismo por la elección de L . Por tanto $H_1(N - S) \rightarrow H_1(N)$ es sobreyectiva y de la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_1(N - S) &\longrightarrow H_1(N) \longrightarrow H_1(N, N - S) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_0(N - S) \longrightarrow \tilde{H}_0(N) = 0 \end{aligned}$$

concluimos que $\tilde{H}_0(N - S)$ es isomorfo a $H_1(N, N - S) = \mathbb{Z}_2$, lo que establece que $N - S$ tiene dos componentes conexas.

Esto concluye la prueba: $N - U$ tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales tiene por borde un plano proyectivo (que proviene de ∂N) y una 2-esfera (que proviene de ∂U). Contradicción. \square

Nótese, respecto al Ejemplo 4.20 y con la misma notación, que K sí que puede encajarse como atractor inestable sin explosiones externas en una 3-variedad compacta con borde sin más que aplicar la construcción del Ejemplo 4.2.

4.4. Atractores sin explosiones externas en superficies

Para toda esta sección el espacio de fases M será una superficie (una 2-variedad sin borde, no necesariamente compacta). Por el Corolario 4.19 ya sabemos que si $K \subseteq M$ es un atractor conexo sin explosiones externas entonces $\chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$, y nuestro primer resultado muestra que esta condición es también suficiente:

Teorema 4.21. *Sea K un atractor aislado en una 2-variedad M sin borde. Entonces $\chi(K) \geq \chi(\mathcal{A}(K))$ y además*

$$K \text{ no tiene explosiones externas} \Leftrightarrow \chi(\mathcal{A}(K)) = \chi(K).$$

Demostración. Comenzaremos probando la desigualdad $\chi(K) \geq \chi(\mathcal{A}(K))$. Respecto a la equivalencia del enunciado, sólo hace falta argumentar la implicación (\Leftarrow), pues como ya señalamos arriba la otra se sigue inmediatamente del Corolario 4.19.

Aserto 1. $\chi h(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$.

Prueba. Como \widehat{K} (la estabilización de K) es un atractor estable con región de atracción $\mathcal{A}(K)$, su característica de Conley-Euler es $\chi h(\widehat{K}) = \chi(\widehat{K})$ (para ver esto puede tomarse un entorno positivamente invariante de K como entorno aislante propio para calcular su índice de Conley o bien acudir a [76, Corollary 2.(b), p. 1437]). Por otro lado, y puesto que la inclusión $\widehat{K} \subseteq \mathcal{A}(\widehat{K}) = \mathcal{A}(K)$ es una equivalencia *shape*, se tiene que $\chi h(\widehat{K}) = \chi(\widehat{K}) = \chi(\mathcal{A}(K))$.

Ahora, todo punto fijo de \widehat{K} (si es que hay alguno) debe yacer en K , porque este último es un atractor cuya región de atracción contiene a \widehat{K} . En consecuencia, por [47, Corollary. (ii), p. 858] se concluye que $\chi h(K) = \chi h(\widehat{K}) = \chi(\mathcal{A}(K))$.

Puede ser conveniente introducir aquí una aclaración. El artículo de McCord [47] está planteado para flujos de clase \mathcal{C}^1 en variedades compactas. Sin embargo, no es difícil ver que sólo se utiliza la diferenciabilidad cerca del compacto invariante. Más aún, como el índice de Conley y los puntos fijos se preservan por equivalencia topológica, las afirmaciones de [47, Corollary., p. 858] son también válidas para flujos que son equivalentes a uno de clase \mathcal{C}^1 cerca del compacto invariante. Al final de la prueba argumentaremos que ese es nuestro caso.

Aserto 2. Se tiene la desigualdad $\chi(K) \geq \chi(\mathcal{A}(K))$.

Prueba. Puesto que K tiene *shape* poliedral por el Corolario 4.5 y el espacio de fases es 2-dimensional, podemos tomar un bloque aislante N de K que sea regular en el sentido del primer capítulo (véase el Teorema 1.2 allí), es decir, N es una 2-variedad compacta con borde, tanto N^e como N^s son 1-variedades compactas con borde y la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia *shape*. Ahora, como $\chi h(K) = \chi(N, N^s) = \chi(N) - \chi(N^s)$, utilizando el Aserto 1. y la igualdad $\chi(K) = \chi(N)$ se tiene que

$$\chi(N^s) = \chi(K) - \chi(\mathcal{A}(K)).$$

Como $\chi(N^s) \geq 0$ porque N^s es una 1-variedad, se sigue que $\chi(K) \geq \chi(\mathcal{A}(K))$.

Aserto 3. Si $\chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$, entonces K posee un bloque aislante de la forma $N = N^+ \cup N^-$.

Prueba. En la notación del Aserto 2., $\chi(N^s) = \chi(K) - \chi(\mathcal{A}(K)) = 0$ porque se ha supuesto ahora que $\chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$. Esto implica que N^s debe ser una unión de circunferencias y, en particular, no tiene borde. Ahora, por dualidad de Alexander aplicada al par compacto (N^s, n^-) en la 1-variedad compacta sin borde N^s se tiene que

$$H_0(N^s - n^-) = \check{H}^1(N^s, n^-) = 0,$$

donde la última igualdad se debe a que la inclusión $n^- \subseteq N^s$ es una equivalencia *shape* por la Proposición 1.15. En consecuencia $n^- = N^s$ y también $n^+ = N^e$ (si existiese $p \in N^e - n^+$, su dual $p' \in N^s - n^-$, contradicción). Finalmente, esto implica que $\partial N = N^e \cup N^s = n^+ \cup n^-$ y por tanto $N = N^+ \cup N^-$.

Aserto 3. K sólo tiene explosiones internas.

Prueba. Esto es fácil. Sea $N = N^+ \cup N^-$ un bloque aislante para K . Queremos mostrar que $J^+(p) \subseteq K$ para todo $p \in \mathcal{A}(K) - K$. Dado $p \in \mathcal{A}(K)$, como $\emptyset \neq \omega(p) \subseteq K$ porque K es un atractor, existe $t \geq 0$ tal que $p \cdot [t, +\infty) \subseteq N$, o también $p \cdot t \in N^+$. Ahora, como N^+ es un entorno de $p \cdot t$ en N porque $N = N^+ \cup N^-$, también lo es en M y en consecuencia $J^+(p) = J^+(p, N^+)$. Finalmente, como K es un atractor estable en N^+ (puede verse el Aserto en la demostración del Lema 0.1), se tiene $J^+(p, N^+) \subseteq K$, lo que concluye la prueba.

Sólo queda justificar la hipótesis de que el flujo es topológicamente equivalente a uno de clase \mathcal{C}^1 cerca de \widehat{K} . Sea U un entorno abierto de \widehat{K} en M tal que \overline{U} es una 2-variedad compacta con borde. Por el teorema de Beck ([6, 3. Theorem, p. 99]) puede modificarse el flujo en M de modo que ∂U consta de puntos fijos pero en U el nuevo flujo es topológicamente equivalente al anterior (los segmentos de trayectoria en U permanecen inalterados, salvo una reparametrización). Ahora U es un conjunto invariante, y pegando discos sobre su borde para deshacerse de él se obtiene una 2-variedad compacta \widehat{U} que contiene a U y a la que puede extenderse el flujo sin más que hacer que $\widehat{U} - U$ conste de puntos fijos. Ahora sólo resta usar el teorema de Gutiérrez [30, Smoothing Theorem., p. 17] para concluir que el flujo en \widehat{U} (y por tanto en U , que es un subconjunto abierto e invariante de \widehat{U}) es topológicamente equivalente a uno de clase \mathcal{C}^1 . \square

Si nos restringimos a atractores globales, el siguiente Teorema 4.22 da una descripción completa de los mismos:

Teorema 4.22. *Sea M una superficie compacta, conexa y sin borde. Si $K \subseteq M$ es un atractor inestable global, conexo, y sin explosiones externas, entonces $\chi(M) \leq 0$ (luego en particular M no puede ser ni la esfera ni el plano proyectivo) y K tiene el shape de un bouquet de $1 - \chi(M)$ circunferencias.*

Demostración. Por el Corolario 4.5 se sabe que K tiene el *shape* de un poliedro finito, y en particular $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado. Además, $\check{H}^2(K; \mathbb{Z}_2) = 0$ porque en otro caso sería $K = M$ y entonces K sería estable. Así, el Corolario B.9 implica que K ha de tener el *shape* de un bouquet de r circunferencias, y sólo queda observar que por el Corolario 4.19 es $1 - r = \chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K)) = \chi(M)$. Finalmente, puesto que

$r \geq 1$ (ha de ser $r \geq 0$ por definición, y si fuese $r = 0$ entonces K tendría *shape* trivial, lo que no es posible en virtud de la parte (2) de la Proposición 4.14) se concluye que $\chi(M) = 1 - r \leq 0$. \square

No es difícil construir ejemplos concretos, para cualquier superficie cerrada M tal que $\chi(M) \leq 0$, de atractores K que satisfagan las condiciones del Teorema 4.22. Observemos por último que el hecho de que ni la esfera ni el plano proyectivo pueden contener atractores globales, conexos, y sin explosiones externas se probará más adelante por otros medios (y sin la hipótesis de ser globales) en los Ejemplos 4.26 y 4.28.

4.5. Una caracterización de las variedades que pueden contener atractores inestables sin explosiones externas

A continuación iniciaremos el estudio global de los atractores sin explosiones externas, relacionando algunas de sus propiedades dinámicas (en concreto, el número de componentes homoclínicas en su región de atracción) con la topología del espacio de fases. Un ejemplo de esta línea de trabajo puede encontrarse en [54, Theorem 17., p. 249], donde se demuestra que cualquier atractor inestable en \mathbb{R}^n debe tener explosiones externas.

El enfoque de esta sección está inscrito en la línea de la teoría clásica de Morse, Smale y Conley, pero no está subsumido en ella. En efecto, el bello trabajo de estos tres autores utiliza descomposiciones de Morse para relacionar información global sobre el espacio de fases con información local (expresada en términos del índice de Conley) acerca de compactos invariantes aislados, pero en nuestro contexto sucede que los atractores inestables no pueden ser detectados por las descomposiciones de Morse, por presentar órbitas homoclínicas. Más precisamente,

Observación 4.23. *Supóngase que $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$ es una descomposición de Morse de M (que, en particular, habrá de suponerse compacto) y K es un atractor contenido en algún conjunto de Morse M_k . Entonces $\hat{K} \subseteq M_k$. Para verlo, si $p \in \hat{K}$ entonces $\omega(p) \subseteq K \subseteq M_k$ y, puesto que $\alpha(p)$ debe estar contenido en algún miembro de \mathcal{M} e interseca a K (véase la caracterización de \hat{K} en [7, 1.25 Theorem., p. 64]) se sigue que $\alpha(p) \subseteq M_k$ (porque \mathcal{M} es descomposición de Morse). Esto implica que $p \in M_k$ y demuestra la afirmación.*

Nuestro primer resultado ofrece condiciones necesarias para que una variedad pueda contener un atractor sin explosiones externas.

Teorema 4.24. *Sea M una n -variedad R -orientable y sin borde. Supongamos que $K \subseteq M$ es un atractor conexo, inestable, y sin explosiones externas. Entonces existen r clases de cohomología independientes*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in H^1(M; R)$$

tales que

$$\alpha_i \smile \alpha_j = 0 \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq r,$$

donde $r \geq 1$ es el número de componentes homoclínicas de $\mathcal{A}(K) - K$.

Demostración. Puesto que K , y en consecuencia $\mathcal{A}(K)$, son conexos asumiremos sin pérdida de generalidad que M es conexa (si no lo es, se argumenta con la componente que contenga a K). Sea N un bloque aislante regular de K . Por la Proposición 4.11 se sabe que n^- tiene componentes n_1^-, \dots, n_r^- . Tomaremos coeficientes en R a lo largo de toda la demostración.

Aserto 1. n^- no separa M .

Prueba. Bastará demostrar que no separa $\mathcal{A}(K)$, puesto que este último es un entorno abierto de n^- . Por la Proposición 4.11 tenemos $\mathcal{A}(K) = K \cup n^- \cdot \mathbb{R} \cup \bigcup_{j=r+1}^s n_j^+ \cdot \mathbb{R}$, donde la unión es disjunta. Por lo tanto

$$\mathcal{A}(K) - n^- = K \bigcup n^- \cdot (-\infty, 0) \bigcup n^- \cdot (0, +\infty) \bigcup \bigcup_{j=r+1}^s n_j^+ \cdot \mathbb{R}.$$

Para cualquier $p \in n^- \cdot (-\infty, 0)$ claramente $\overline{p \cdot (-\infty, 0]} \subseteq n^- \cdot (-\infty, 0) \subseteq N^-$ de modo que $\emptyset \neq \alpha(p) \subseteq K$. En consecuencia $\overline{p \cdot (-\infty, 0]} = p \cdot (-\infty, 0] \cup \alpha(p) \subseteq n^- \cdot (-\infty, 0) \cup K \subseteq \mathcal{A}(K) - n^-$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{A}(K) - n^-$ que contiene a p y tiene intersección no vacía con K . Como se supuso que K es conexo, esto implica que K y p están en la misma componente de $\mathcal{A}(K) - n^-$. Un argumento similar se puede hacer para p en $n^- \cdot (0, +\infty)$ o en $\bigcup_{j=r+1}^s n_j^+ \cdot \mathbb{R}$, con la diferencia de que ahora es $\overline{p \cdot [0, +\infty)}$ el conjunto conexo que contiene a p , corta a K y está contenido en $\mathcal{A}(K) - n^-$. Esto demuestra que todo punto de $\mathcal{A}(K) - n^-$ yace en la misma componente que K , de modo que $\mathcal{A}(K) - n^-$ es ciertamente conexo.

A continuación pasamos a definir las clases de cohomología $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in H^1(M)$. Denotemos por $k : M \rightarrow (M, M - n^-)$ la inclusión. Como $H_1(M, M - n^-) = H^{n-1}(n^-)$ por dualidad de Alexander en M y $H^{n-1}(n^-) = H_0(n^-) = R^r$ por la Proposición 4.12, se sigue que $H_1(M, M - n^-)$ es libre de rango r . Ahora, el teorema del coeficiente universal implica que $H^1(M, M - n^-)$ también es libre de rango r . Sean $\beta_1, \dots, \beta_r \in H^1(M, M - n^-)$ generadores independientes y pongamos $\alpha_j = k^*(\beta_j) \in H^1(M)$ para cada $1 \leq j \leq r$.

Aserto 2. Las clases $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in H^1(M)$ son independientes.

Prueba. Considérese la siguiente porción de la sucesión exacta larga en cohomología reducida para el par $(M, M - n^-)$:

$$\dots \leftarrow H^1(M) \xleftarrow{k^*} H^1(M, M - n^-) \leftarrow \tilde{H}^0(M - n^-) \leftarrow \dots$$

Puesto que se sabe, por el Aserto 1., que n^- no separa M , es $\tilde{H}^0(M - n^-) = 0$ y en consecuencia $k^* : H^1(M, M - n^-) \rightarrow H^1(M)$ es un monomorfismo. Por tanto $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son clases independientes en $H^1(M)$.

Aserto 3. Las clases $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ satisfacen las relaciones $\alpha_i \smile \alpha_j = 0$ para cada $1 \leq i, j \leq r$.

Prueba. Puesto que n^- es una sección topológica de $\hat{K} - K$, existen dos homeomorfismos $h_1, h_2 : M \rightarrow M$ tales que (i.) ambos son homotópicos a la identidad id_M y (ii.) $h_1(n^- \cdot (-1)) = n^-$ y $h_2(n^- \cdot (+1)) = n^-$. Más aún, el producto $\text{cup} \smile : H^1(M, M - n^- \cdot (-1)) \times H^1(M, M - n^- \cdot (+1))$ es trivial porque $M - n^- \cdot (-1)$ y $M - n^- \cdot (+1)$ son abiertos cuya unión es toda la variedad M (véase [78, p. 251]).

Denotando $k_1 : M \subseteq (M, M - n^- \cdot (-1))$ y $k_2 : M \subseteq (M, M - n^- \cdot (+1))$ las inclusiones, la naturalidad del producto *cup* ([78, 8., p. 251]) implica que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(M, M - n^-) & & H^1(M, M - n^-) \\
 \downarrow h_1^* & \nearrow h_2^* & \\
 H^1(M, M - n^- \cdot (-1)) \times H^1(M, M - n^- \cdot (+1)) & \xrightarrow{\smile} & H^1(M, M) = 0 \\
 \downarrow k_1^* \times k_2^* & & \downarrow \\
 H^1(M) \times H^1(M) & \xrightarrow{\smile} & H^2(M)
 \end{array}$$

Se sigue que $(h_1 \circ k_1)^*(\beta_i) \smile (h_2 \circ k_2)^*(\beta_j) = (k_1^* \circ h_1^*)(\beta_i) \smile (k_2^* \circ h_2^*)(\beta_j) = 0$, pero como h_1 y h_2 son homotópicos a la identidad, tenemos $h_1 \circ k_1 \simeq k$, $h_2 \circ k_2 \simeq k$ y en consecuencia $\alpha_i \smile \alpha_j = 0$.

Esto completa la prueba. \square

Podemos ahora explorar algunos corolarios al Teorema 4.24.

Corolario 4.25. *Si M es una variedad sin borde R -orientable tal que $H^1(M; R) = 0$ entonces cualquier atractor aislado conexo que sea inestable tiene explosiones externas.*

Para ilustrar el Corolario 4.25 presentamos el Ejemplo 4.26, parte del cual puede encontrarse probado, con técnicas distintas, en [54, Theorem 17., p. 249].

Ejemplo 4.26. Todo atractor aislado conexo e inestable $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene explosiones externas, pues $H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$. Una afirmación similar vale para \mathbb{S}^n si $n > 1$ o para los espacios proyectivos complejos \mathbb{CP}^n .

En ocasiones un espacio de fases M puede sumergirse en otro que, como \mathbb{R}^n , no puede satisfacer las condiciones del Teorema 4.24, y puede utilizarse este argumento para demostrar que todo atractor aislado conexo e inestable en M tiene explosiones externas. Ilustramos esta afirmación con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.27. Cualquier atractor aislado conexo e inestable K contenido en el anillo abierto n -dimensional $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < \|x\| < 2\}$ tiene explosiones externas.

Para probarlo obsérvese que \mathbb{A} es un subconjunto de \mathbb{R}^n , espacio de fases del que sí sabemos que no puede contener atractores aislados conexos e inestables sin explosiones externas. Así, sólo hemos de extender el flujo de \mathbb{A} a todo \mathbb{R}^n . Para ello, sean $\hat{K} \subseteq \mathbb{A}$ la estabilización de K y P un entorno compacto y positivamente invariante de \hat{K} en \mathbb{A} . Por el teorema de Beck ([6, 3. Theorem, p. 99]) puede modificarse el flujo en el anillo haciendo que cada punto de $\mathbb{A} - \text{int}(P)$ sea fijo y dejando $\text{int}(P)$ inalterado, salvo por una reparametrización de los segmentos de trayectoria contenidos en su interior. Bajo este nuevo flujo K es aún un atractor aislado y conexo cuya región de atracción es $\text{int}(P)$. Si ahora extendemos el flujo a todo \mathbb{R}^n haciendo que los puntos fuera de \mathbb{A} sean de equilibrio, resulta que K ha de tener explosiones externas por el Ejemplo 4.26.

La situación descrita en el Ejemplo 4.27 contrasta fuertemente con lo que sucede para los anillos cerrados, que ciertamente sí contienen atractores aislados, conexos,

aislados y sin explosiones externas (aplíquese la construcción descrita en el Ejemplo 4.2 con $Z = \mathbb{D}^{n-1}$, el disco $(n-1)$ -dimensional).

Hasta el momento no hemos hecho uso de la estructura multiplicativa en el anillo de cohomología. Una situación en la que ésta adquiere relevancia es la que se refiere a los espacios proyectivos reales.

Ejemplo 4.28. Un atractor aislado, conexo e inestable K en \mathbb{RP}^n , el espacio proyectivo real n -dimensional, tiene explosiones externas siempre que $n \geq 2$.

Para probar esto aplíquese el Teorema 4.24 con $R = \mathbb{Z}_2$. Es conocido que

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[\alpha]}{\alpha^{n+1}}$$

es el álgebra polinomial truncada en una indeterminada α . Por tanto la única clase no trivial en $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ es α , pero su cuadrado α^2 es no trivial en $H^2(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ (recuérdese que estamos asumiendo que $n \geq 2$) y así las condiciones del Teorema 4.24 no se pueden satisfacer.

Obsérvese que para $n = 1$ el espacio \mathbb{RP}^1 es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , que ciertamente sí admite un atractor aislado, conexo e inestable sin explosiones externas (tómese como K un único punto fijo y el arco restante de \mathbb{S}^1 como órbita homoclínica).

Ejemplo 4.29. Sea $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ el toro n -dimensional. Si $K \subseteq \mathbb{T}^n$ es un atractor aislado, conexo e inestable sin explosiones externas, entonces existe exactamente una componente homoclínica en $\mathcal{A}(K) - K$.

La afirmación se sigue de un sencillo examen de la estructura del anillo de cohomología $H^*(\mathbb{T}^n; \mathbb{Z})$, que es un álgebra exterior con n generadores $\omega_1, \dots, \omega_n \in H^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{Z})$. En efecto, si $\alpha_1 = \sum_{i=1}^n k_i \omega_i$ es una clase no trivial en $H^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{Z})$ y $\alpha_2 = \sum_{j=1}^n l_j \omega_j$ es otra clase que satisface $\alpha_1 \smile \alpha_2 = 0$, entonces un cálculo simple muestra que $\alpha_1 \smile \alpha_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (k_i l_j - k_j l_i) (\omega_i \smile \omega_j) = 0$, lo que implica que $k_i l_j - k_j l_i = 0$ para cada $1 \leq i < j \leq n$. Pero estos no son sino los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

que en consecuencia tiene rango 1 y así α_1, α_2 son linealmente dependientes. Por tanto el número máximo de clases en $H^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{Z})$ que satisfacen las condiciones del Teorema 4.24 es 1 y la afirmación queda probada.

El siguiente resultado es una consecuencia de los Teoremas 4.21 y 4.24. Lo enunciaremos para atractores en \mathbb{R}^2 , pero es válido más generalmente en cualquier 2-variedad en la que los atractores aislados inestables deban tener explosiones externas (por ejemplo \mathbb{S}^2 , \mathbb{RP}^2 o un anillo abierto).

Corolario 4.30. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un atractor aislado conexo. Entonces

$$K \text{ es estable} \Leftrightarrow \chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K)).$$

Demostración. La única implicación no trivial es \Leftarrow . Por tanto, supongamos que $\chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$. Entonces por el Teorema 4.21 K no tiene explosiones externas, y por el Ejemplo 4.26 se sigue que K no puede ser inestable. \square

Ejemplo 4.31. Como caso particular del Corolario 4.30 se obtiene el siguiente resultado: todo atractor global $K \subseteq \mathbb{R}^2$ que sea aislado y conexo debe ser estable. En efecto, como K es conexo $\chi(K) \geq 1$ y en consecuencia $1 \geq \chi(K) \geq \chi(\mathcal{A}(K)) \geq 1$ en virtud del Teorema 4.21. Por tanto $\chi(K) = \chi(\mathcal{A}(K))$ y se aplica el Corolario 4.30. Una demostración más geométrica de este mismo resultado puede verse en [54, Theorem 18., p. 249].

Una pequeña elaboración del Ejemplo 4.2 proporciona un recíproco parcial al Teorema 4.24:

Teorema 4.32. *Sea M una variedad diferenciable cerrada y orientada. Si $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq 0$, entonces M contiene un atractor inestable global que es aislado, conexo, y no tiene explosiones externas.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que M es conexa. Tomaremos coeficientes en \mathbb{Z} a lo largo de toda la prueba. Sea $\alpha \in H^1(M)$ una clase no nula de cohomología y denotemos por $z \in H_{n-1}(M)$ su dual de Poincaré, que también es no nulo. Por [79, Théorème II.27., p. 55] existe una hipersuperficie cerrada y orientada $Z \subseteq M$ tal que, si $i : Z \subseteq M$ denota la inclusión, $i_*([Z]) = z$ donde $[Z] \in H_{n-1}(Z)$ es una clase fundamental de Z . Si Z no es conexa, pongamos que tiene componentes Z_1, \dots, Z_p con clases fundamentales $[Z_1], \dots, [Z_p]$ tales que $[Z] = [Z_1] + \dots + [Z_p]$. Como $i_*([Z]) = i_*([Z_1]) + \dots + i_*([Z_p]) = z$ es no nula, algún $i_*([Z_k])$ es a su vez no nulo (aunque no necesariamente igual a z). Retendremos Z_k , a la que volveremos a llamar Z , y descartaremos las restantes componentes.

Aserto 1. Z no separa M .

Prueba. Considérese la siguiente porción de la sucesión exacta larga en homología para el par (M, Z) :

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(Z) = 0 \longrightarrow H_n(M) \longrightarrow H_n(M, Z) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{n-1}(Z) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

El homomorfismo inducido por inclusión $i_* : H_{n-1}(Z) \longrightarrow H_{n-1}(M)$ es inyectivo, porque lleva el generador $[Z]$ de $H_{n-1}(Z) = \mathbb{Z}$ a un elemento no nulo de $H_{n-1}(M)$ por construcción y además $H_{n-1}(M)$ es libre de torsión porque M es orientable. Se sigue entonces que $H_n(M, Z) = H_n(M) = \mathbb{Z}$ y por el teorema del coeficiente universal la parte libre de $H^n(M, Z)$ es (isomorfa a) \mathbb{Z} .

Aplicando la dualidad de Alexander al par (M, Z) en M hay un isomorfismo $H_0(M - Z) = \check{H}^n(M, Z)$. Puesto que (M, Z) es un par poliedral, sobre él coinciden la cohomología de Čech y la singular, de modo que $H_0(M - Z) = H^n(M, Z)$ y en consecuencia $H^n(M, Z)$ es libre, lo que junto a la conclusión del párrafo anterior prueba que $H^n(M, Z) = \mathbb{Z}$. Por tanto $M - Z$ es conexo.

Aserto 2. Z posee un entorno producto en M . Más precisamente, hay un entorno abierto U de Z en M y un homeomorfismo $h : U \longrightarrow Z \times \mathbb{R}$ tal que $h(z) = (z, 0)$ para todo $z \in Z$.

Prueba. Considérese el fibrado normal de Z en M , que denotaremos $\perp Z$. Por el teorema del entorno tubular podemos asumir que su espacio total $E(\perp Z)$ está encajado como un entorno abierto U de Z en M y Z corresponde a la sección cero de $\perp Z$. Será entonces suficiente probar que $\perp Z$ es trivial. Ahora, $\perp Z$ es isomorfo al fibrado cociente

$\frac{TM|_Z}{TZ}$, donde TM y TZ son los fibrados tangentes a M y Z respectivamente y $TM|_Z$ es la restricción de TM a Z . Como Z y M son orientables, sus fibrados tangentes son a su vez orientables y en consecuencia también lo es $\perp Z$. Así $\perp Z$ es un fibrado orientable 1-dimensional, que por tanto es trivial ([35, Theorem 4.3., p. 106]).

Por último, definamos un flujo en $Z \times \mathbb{R}$ tal que $Z \times (-\infty, 0]$ y $Z \times [1, +\infty)$ consten de puntos fijos y los puntos de $Z \times (0, 1)$ se muevan desde $Z \times \{0\}$ hacia $Z \times \{1\}$. Llévase este flujo a M mediante el homeomorfismo h y extiéndase a todo M haciendo que los puntos fuera de U sean fijos. El conjunto $K = M - h^{-1}(Z \times (0, 1))$ es un atractor global aislado. No es estable, porque la órbita de cualquier $p \notin K$ es homoclínica, y además no tiene explosiones externas porque por construcción $J^+(p) \subseteq K$ para $p \in M - K$. Que es conexo se sigue de que la inclusión $K \subseteq M - Z = M - h^{-1}(Z \times \{0\})$ es una equivalencia *shape* y ya se mostró que Z no separa M . \square

Combinando los Teoremas 4.24 y 4.32 la siguiente caracterización es inmediata.

Corolario 4.33. *Sea M una variedad diferenciable cerrada y orientable. Existe un atractor inestable, conexo y sin explosiones externas en M si, y sólo si, $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq 0$.*

4.6. Atractores sin explosiones externas con el *shape* de \mathbb{S}^n

Esta última sección abunda en la relación entre las propiedades geométricas de un atractor sin explosiones externas y las del espacio de fases que lo contiene. En concreto, abordamos la siguiente pregunta: sea M una variedad conexa, sin borde, y sea $K \subseteq M$ un atractor inestable y sin explosiones externas que tiene el *shape* de \mathbb{S}^n . ¿Qué se puede afirmar sobre M ? Un argumento similar al del Ejemplo 4.20 muestra que M debe ser $(n+1)$ -dimensional. Además, por el Corolario 4.15 se sigue que M ha de ser compacta y que existe una única componente homoclínica.

Para enunciar el resultado principal (Teorema 4.34) necesitamos introducir algo de notación. El producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ puede pensarse como el cociente obtenido de $\mathbb{S}^n \times [-1, 1]$ identificando sus tapas superior e inferior ($\mathbb{S}^n \times \{1\}$ y $\mathbb{S}^n \times \{-1\}$, respectivamente) mediante el homeomorfismo $h(p, 1) := (p, -1)$. No obstante, necesitaremos un “producto con torsión” $\mathbb{S}^n \times_t \mathbb{S}^1$, que es el resultado de pegar las tapas superior e inferior de $\mathbb{S}^n \times [-1, 1]$ mediante el homeomorfismo $r_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ dado por $r_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, esto es, identificando $(p, 1)$ con $(r_n(p), -1)$. Tanto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ como $\mathbb{S}^n \times_t \mathbb{S}^1$ son $(n+1)$ -variedades compactas y conexas sin borde, pero la primera es orientable mientras que la segunda no lo es porque r_n invierte la orientación.

Teorema 4.34. *Sean M una variedad conexa sin borde y $K \subseteq M$ un atractor inestable sin explosiones externas. Si K tiene el *shape* de \mathbb{S}^n , donde $1 \leq n \leq 2$, entonces M es homeomorfa a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ (si es orientable) o a $\mathbb{S}^n \times_t \mathbb{S}^1$ (si es no orientable) y K es un atractor global.*

Más adelante se describirá cómo se puede generalizar el Teorema a dimensiones mayores.

Para probar el Teorema 4.34 necesitaremos el siguiente Lema 4.35, cuya prueba se basa en el *teorema del anillo*:

Teorema. Si $f_1, f_2 : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ son dos encajes bicollarados de \mathbb{S}^{n-1} en \mathbb{S}^n , entonces la componente de $\mathbb{S}^n - f_1(\mathbb{S}^{n-1}) \cup f_2(\mathbb{S}^{n-1})$ comprendida entre $f_1(\mathbb{S}^{n-1})$ y $f_2(\mathbb{S}^{n-1})$ es un anillo topológico, esto es, un producto $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$.

Recuérdese que un encaje $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es *bicollarado* si se puede extender a un encaje $\hat{f} : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ que se restringe a f en $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$. El teorema del anillo fue probado en [42] para $n \neq 4$ y en [59] para $n = 4$ (véase también [26]).

Lema 4.35. *Sea N una $(n+1)$ -variedad compacta con el shape de \mathbb{S}^n , $n \geq 2$. Entonces N es orientable y su borde ∂N consta de dos componentes, cada una de las cuales es una n -esfera homológica. Si ambas son la n -esfera, entonces N es homeomorfa a $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que, puesto que N y \mathbb{S}^n son ANR's, la hipótesis de que tengan el mismo *shape* implica que, de hecho, tienen el mismo tipo de homotopía. En particular N es simplemente conexa (recuérdese que $n \geq 2$) y en consecuencia es orientable. Además, por dualidad de Lefschetz ([78, 20 Theorem, p. 298]) es

$$H_k(N, \partial N) = H^{n+1-k}(N) = H^{n+1-k}(\mathbb{S}^n),$$

de manera que

$$H_k(N, \partial N) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \text{ ó } k = n + 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $0 < k < n$ entonces $H_k(N) = 0$ y $H_{k+1}(N, \partial N) = 0$, luego de la sucesión exacta para el par $(N, \partial N)$

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(N, \partial N) = 0 \longrightarrow H_k(\partial N) \longrightarrow H_k(N) = 0 \longrightarrow \dots$$

se sigue que $H_k(\partial N) = 0$. En dimensión $k = 0$

$$\dots \longrightarrow H_1(N) = 0 \longrightarrow H_1(N, \partial N) = \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_0(\partial N) \longrightarrow \tilde{H}_0(N) = 0 \longrightarrow \dots$$

de donde $\tilde{H}_0(\partial N) = \mathbb{Z}$ y por tanto ∂N tiene dos componentes conexas S_1 y S_2 . Como $H_k(\partial N) = H_k(S_1) \oplus H_k(S_2)$, para $0 < k < n$ tenemos $H_k(S_1) = H_k(S_2) = 0$. Finalmente, ∂N es una n -variedad compacta, orientable y sin borde (porque es el borde de una variedad compacta y orientable), luego lo mismo puede decirse de sus componentes S_1 y S_2 . Así $H_n(S_1) = H_n(S_2) = \mathbb{Z}$ y en consecuencia S_1 y S_2 son esferas homológicas.

Supongamos ahora que tanto S_1 como S_2 son de hecho n -esferas. Denotemos \hat{N} a la $(n+1)$ -variedad compacta y sin borde obtenida pegando a N dos $(n+1)$ -celdas D_1 y D_2 de modo que $\partial D_1 = S_1$ y $\partial D_2 = S_2$.

Afirmamos que \hat{N} es una $(n+1)$ -esfera homológica. De la sucesión exacta para el par $(\hat{N}, D_1 \cup D_2)$ se sigue de inmediato que $H_1(\hat{N}) \oplus \mathbb{Z} = H_1(\hat{N}, D_1 \cup D_2)$ y $H_k(\hat{N}) = H_k(\hat{N}, D_1 \cup D_2)$ para $2 \leq k \leq n+1$. Si denotamos por p_1 y p_2 los centros de D_1 y D_2 , tenemos $H_k(\hat{N}, D_1 \cup D_2) = H_k(\hat{N} - \{p_1, p_2\}, D_1 \cup D_2 - \{p_1, p_2\}) = H_k(N, \partial N) = H^{n+1-k}(N)$ por escisión y dualidad de Lefschetz. En definitiva, $H_1(\hat{N}) \oplus \mathbb{Z} = H^n(N)$ y $H_k(\hat{N}) = H^{n+1-k}(N)$ siempre que $2 \leq k \leq n+1$, y como N tiene los mismos grupos de cohomología que \mathbb{S}^n , sustituyendo en la fórmula de arriba se comprueba enseguida que \hat{N} tiene los grupos de homología de la $(n+1)$ -esfera.

\hat{N} se obtiene adjuntando las $(n+1)$ -celdas D_1 y D_2 sobre N . Como $n+1 \geq 3$ y N es simplemente conexo, también lo es \hat{N} como consecuencia del teorema de Seifert-van Kampen [34, Theorem 1.20.]. Así, la conjetura de Poincaré implica que \hat{N} es la

$(n+1)$ -esfera. Ahora, S_1 y S_2 son dos encajes de \mathbb{S}^n en $\widehat{N} \cong \mathbb{S}^{n+1}$ que son bicollarados, porque la unión de un collar de S_1 en N y otro collar de S_1 en D_1 da un bicollar para S_1 en \widehat{N} , y análogamente para S_2 . Del teorema del anillo se sigue entonces que N es homeomorfa a $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$. \square

El Lema 4.35 no es cierto para $n = 1$, pues en este caso N puede ser o bien $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ o bien una banda de Möbius cerrada (esto es inmediato).

Demostración. (del Teorema 4.34) Nos centraremos en el caso $n = 2$, porque $n = 1$ es similar pero más sencillo. Ya sabemos que M es una 3-variedad compacta y K es un atractor global. Sea N un bloque aislante regular de K .

Aserto 1. N es una 3-variedad.

Prueba. Si $p \in \text{int}(N)$, entonces el propio $\text{int}(N)$ es un entorno de p en N que es una 3-variedad, porque es abierto en M , que lo es. Ahora, si $p \in \partial N$ entonces o bien $p \in n^+$ o bien $p \in n^-$ porque $N = N^+ \cup N^-$ por la Proposición 4.7. En cualquier caso, tanto n^+ como n^- son abiertos en ∂N y por ello, en virtud del Lema 1.8, son 2-variedades. Ahora, por el Lema 1.7 cada punto $p \in \partial N$ posee un entorno U en N de la forma $U \cong V[0, \varepsilon)$, donde V es un entorno abierto de p en ∂N . Entonces U es una 3-variedad, y se concluye así que N es 3-variedad puesto que lo es localmente.

Aserto 2. Existe un homeomorfismo $h_1 : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que $h_1(\mathbb{S}^2 \times \{0\}) = n^-$ y $h_1(\mathbb{S}^2 \times \{1\}) = n^+$.

Prueba. Como la inclusión $K \hookrightarrow N$ es una equivalencia *shape*, N tiene el mismo *shape* de K y por tanto de \mathbb{S}^n . Sabemos por el Lema 4.35 que las componentes de ∂N son esferas homológicas, y la única 2-variedad que satisface tal condición es la propia 2-esfera. En consecuencia, y de nuevo por el Lema 4.35, se sigue que N es homeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ mediante algún homeomorfismo $h_1 : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow N$. Como h_1 se restringe a un homeomorfismo entre los bordes de N y $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$, es claro que podemos asumir sin pérdida alguna de generalidad que $h_1(\mathbb{S}^2 \times \{0\}) = n^-$ y $h_1(\mathbb{S}^2 \times \{1\}) = n^+$ puesto que si esto no sucede sólo es necesario preceder h_1 por el homeomorfismo $\mathbb{S}^2 \times [0, 1] \ni (x, s) \mapsto (x, 1 - s) \in \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$.

Aserto 3. M es homeomorfa o bien a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ o bien a $\mathbb{S}^2 \times_t \mathbb{S}^1$.

Prueba. Es fácil ver que se puede asumir, quizás tras una reparametrización del flujo, que $n^- = n^+ \cdot (-1)$ puesto que tanto n^- como n^+ son secciones de $M - K$ porque K es puramente inestable. Denotando $P := n^+ \cdot [-1, 0]$ la parte de M comprendida entre n^- y n^+ , es claro que ésta es homeomorfa a $n^- \times [-1, 0]$, y por tanto a $\mathbb{S}^2 \times [-1, 0]$, mediante un homeomorfismo $h_2 : \mathbb{S}^2 \times [-1, 0] \rightarrow P$. Al igual que antes supondremos que $h_2(\mathbb{S}^2 \times \{-1\}) = n^+$ y $h_2(\mathbb{S}^2 \times \{0\}) = n^-$ sin pérdida de generalidad.

Considérense las composiciones

$$k : \mathbb{S}^2 \times \{0\} \xrightarrow{h_2} n^- \xrightarrow{h_1^{-1}} \mathbb{S}^2 \times \{0\}$$

y

$$\ell : \mathbb{S}^2 \times \{-1\} \xrightarrow{h_2} n^+ \xrightarrow{h_1^{-1}} \mathbb{S}^2 \times \{1\},$$

que pueden ser pensadas como homeomorfismos de la 2-esfera en sí misma. Por tanto o bien son isotópicas, o bien lo son k y $\ell \circ r_2$. Esto es una consecuencia de la *conjetura del homeomorfismo estable*, que afirma que cualquier homeomorfismo de la esfera que

preserve la orientación es estable (y por tanto isotópico a la identidad, véase por ejemplo [15, Section 4.]). Se sabe ahora que esta conjetura es cierta porque se sigue del teorema del anillo ([15, Theorem 9.4.]).

Supongamos, por ejemplo, que k y $\ell \circ r_2$ son isotópicos (la otra posibilidad, que lo sean k y ℓ , es similar pero un poco más sencilla), de modo que existe un homeomorfismo que preserva niveles $G : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ tal que $G_0(p) = G(p, 0) = k(p, 0)$ y $G_1(p) = G(p, 1) = \ell(r_2(p), -1)$. Sea $h_1^* = h_1 \circ G : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \longrightarrow N$, que es un nuevo homeomorfismo con las mismas propiedades de h_1 en lo que se refiere a su restricción al borde de $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$, porque G preserva niveles.

Ahora, h_1^* y h_2 coinciden en $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$, porque $h_1^*|_{\mathbb{S}^2 \times \{0\}} = h_1 \circ G_0 = h_1 \circ k = h_2$. Por tanto ambos pueden pegarse para obtener una aplicación continua y suprayectiva $H : \mathbb{S}^2 \times [-1, 1] \longrightarrow M$ definida por $H|_{\mathbb{S}^2 \times [-1, 0]} = h_2$ y $H|_{\mathbb{S}^2 \times [0, 1]} = h_1^*$. De este modo M queda representado como un cociente de $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$ módulo la identificación de puntos que tienen la misma imagen por H . Estos son exactamente aquellos $(p, 1)$ y $(q, -1)$, de las tapas superior e inferior respectivamente, tales que $H(p, 1) = H(q, -1)$. Pero como $H(p, 1) = h_1^*(p, 1) = h_1 \circ G_1(p, 1) = h_1 \circ \ell \circ (r_2(p), -1) = h_2(r_2(p), -1)$ y $H(q, -1) = h_2(q, -1)$, se tiene que $H(p, 1) = H(q, -1)$ si, y sólo si, $q = r_2(p)$ (pues h_2 es un homeomorfismo). Por tanto M es el resultado de identificar las tapas superior e inferior de $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$ mediante r_2 , de modo que es homeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times_t \mathbb{S}^1$.

Naturalmente, si k y ℓ hubiesen sido isotópicas, entonces M habría resultado ser homeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. \square

Puede observarse que el caso $n = 1$ del Teorema 4.34 se sigue también de los resultados presentados en la sección sobre superficies: si K tiene el *shape* de una (suma *wedge*) de una 1-esfera, entonces la variedad ambiente debe ser o bien el toro (que es el producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$) o bien la botella de Klein (que es el producto con torsión $\mathbb{S}^1 \times_t \mathbb{S}^1$).

A continuación describiremos las modificaciones necesarias para obtener una versión del Teorema 4.34 en dimensiones mayores, cuando $n \geq 3$. El primer obstáculo para generalizar el argumento radica en que, en el Aserto 1., no se puede asegurar que N sea una variedad puesto que aunque su borde sí sea una variedad homológica, no necesariamente es variedad topológica (véase un ejemplo en [85, p. 245]). Esto se puede arreglar exigiendo que tanto M como el flujo sean diferenciables, puesto que en tal caso el bloque aislante N puede elegirse que sea una variedad por [20].

Aún existe otra dificultad, que se refiere al hecho de que n^- y n^+ , las componentes de ∂N , bien pudieran no ser simplemente conexas. Para asegurar que lo son basta agregar la hipótesis adicional de que $\pi_1(n^-)$ es abeliano, ya que entonces es trivial porque n^- es una esfera homológica. Lo mismo puede afirmarse de n^+ puesto que es homeomorfo a n^- ya que ambos son secciones de $M - K$. En definitiva,

Teorema. Sea M una variedad diferenciable conexa sin borde y sea $K \subseteq M$ un atractor sin explosiones internas para un flujo diferenciable. Si K tiene el *shape* de \mathbb{S}^n y $M - K$ es simplemente conexo (o más generalmente $\pi_1(M - K)$ es abeliano), entonces M es homeomorfo a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ (si es orientable) o a $\mathbb{S}^n \times_t \mathbb{S}^1$ (si no lo es) y además K es un atractor global.

Capítulo 5

La dinámica en torno al borde de una región de atracción

Introducción. La situación que se considera en este capítulo es la siguiente. Si K es un atractor (estable) para un flujo continuo en un espacio de fases M que es un ANR, ¿qué puede decirse acerca de las propiedades topológicas de $\partial\mathcal{A}(K)$? Además, si este último conjunto es un compacto invariante aislado, ¿qué influencia tiene su índice de Conley en la dinámica en el resto del espacio de fases?

Conviene observar que $\partial\mathcal{A}(K)$ es justamente la región fronteriza entre dos comportamientos dinámicos, el de atracción de K y el desconocido del flujo en el complementario de $\overline{\mathcal{A}(K)}$, y es por ello que parece interesante estudiarla (véase, por ejemplo, [57]). Además, la técnica habitual de utilizar las líneas de flujo para construir homotopías y así transferir información de un lugar a otro del espacio de fases aquí no puede utilizarse, puesto que $\partial\mathcal{A}(K)$ presenta una barrera dinámica natural para ello, al ser invariante.

La situación genérica puede ser extremadamente complicada, y esto se muestra ya en el Ejemplo 5.1. Así, si queremos progresar e inscribir este problema en el marco de los capítulos anteriores necesitaremos encontrar condiciones suficientes para garantizar la existencia de bloques aislantes regulares (en el sentido de la Definición 4.3), y una posibilidad (expresada en términos del índice de Conley de $\partial\mathcal{A}(K)$, si está definido) está presentada en el Teorema 5.2. Posteriormente enunciaremos algunas de las consecuencias dinámicas globales que se derivan de esta situación.

Este capítulo proviene de trabajo conjunto con J. M. R. Sanjurjo, véase [71].

Por fijar la notación, φ es un flujo continuo en un espacio de fases M que es un ANR localmente compacto y metrizable. K es un atractor estable para φ y $D := \partial\mathcal{A}(K)$ es la frontera topológica de su región de atracción. Como frontera de un conjunto invariante, D es a su vez invariante, y la situación de interés para nosotros será cuando D sea un compacto invariante aislado.

Comenzamos con el siguiente Ejemplo 5.1, que muestra que incluso en la situación más simple que puede pensarse, aquella en que K es un punto de equilibrio en el plano $M = \mathbb{R}^2$, la topología de D puede ser complicada:

Ejemplo 5.1. En la Figura 5.1 se muestra un flujo con un punto de equilibrio p que es un atractor estable cuya región de atracción $\mathcal{A}(K)$ (sombreada en el dibujo) es homeomorfa a la 2-celda abierta, pero tal que la frontera $D := \partial\mathcal{A}(K)$ no tiene siquiera el *shape* de un poliedro finito. Se comprende que D consta de puntos fijos y es tangente a sí mismo infinitas veces (el hecho de que no tenga el *shape* de un poliedro finito puede

argumentarse, por ejemplo, porque separa \mathbb{R}^2 en una cantidad infinita de discos y por dualidad de Alexander, $\check{H}^1(D)$ no es finitamente generado).

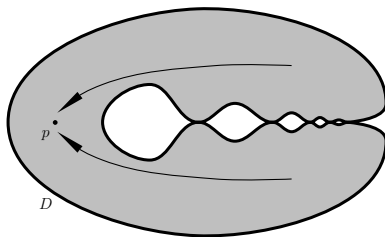


Figura 5.1: Un punto atractor tal que D no tiene *shape* poliedral.

5.1. Condiciones suficientes para la existencia de bloques aislantes regulares

Acabamos de ver con el Ejemplo 5.1 que para comenzar nuestro estudio sobre D es necesario buscar condiciones que garanticen que, al menos, posee *shape* poliedral (que es condición necesaria para la existencia de bloques aislantes regulares, y si M es una variedad de dimensión no mayor que 3, suficiente, como sabemos ya). Una posibilidad que resulta intuitivamente razonable es pedir que D sea un compacto invariante aislado cuyo índice de Conley sea trivial, porque ello implica que no absorbe materia (por así decir) y por tanto cabe esperar que tenga buenas propiedades topológicas. De hecho, basta con pedir un poco menos:

Teorema 5.2. *Sea K un atractor estable en un ANR M y supongamos que la frontera D de su región de atracción $\mathcal{A}(K)$ es un compacto invariante aislado cuyo índice cohomológico 1-dimensional satisface $C\check{H}^1(D) = 0$. Entonces D posee una base de bloques aislantes regulares (en el sentido de la Definición 4.3).*

Como paso preliminar para establecer el Teorema 5.2 necesitamos la siguiente Proposición 5.3, que tiene interés en sí misma.

Proposición 5.3. *Sea K un atractor estable en un ANR M y supongamos que la frontera $D := \partial\mathcal{A}(K)$ de su región de atracción es compacta. Entonces D tiene una cantidad finita de componentes conexas.*

Demostración. Tomemos una función de Lyapunov $\Phi : \mathcal{A}(K) \rightarrow [0, +\infty)$ y considérense los conjuntos $U \supseteq \Sigma$ definidos por $U := \{p \in \mathcal{A}(K) : 0 < \Phi(p) < 2\}$ y $\Sigma := \{p \in \mathcal{A}(K) : \Phi(p) = 1\}$. Es fácil comprobar que la inclusión $i : \Sigma \rightarrow U$ es una equivalencia de homotopía. Ahora, U es un ANR (porque es abierto en M , que es un ANR) y en consecuencia también lo es Σ , porque es un retracts de U . Como Σ es compacto, tiene una cantidad finita de componentes conexas, que llamaremos $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$. La demostración quedará completa una vez mostremos que $D = \alpha(\Sigma)$, porque entonces $D = \alpha(\Sigma) = \bigcup_{k=1}^n \alpha(\Sigma_k)$ y cada $\alpha(\Sigma_k)$ es conexo (porque es compacto y M es localmente compacto), luego D no tiene más de n componentes. Para establecer la igualdad $D = \alpha(\Sigma)$ sólo es necesario probar la inclusión $D \subseteq \alpha(\Sigma)$, porque la otra se sigue inmediatamente del hecho de que K es un atractor. Así, tomemos $p \in D$ y una sucesión $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ que converja a p . Como Σ es una sección de $\mathcal{A}(K) - K$, existe una sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ bien definida tal que $\sigma_k = p_k \cdot t_k \in \Sigma$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $t_k \rightarrow +\infty$, y por tanto $p = \lim \sigma_k \cdot (-t_k) \in \alpha(\Sigma)$. \square

Estamos ya en condiciones de abordar la prueba del Teorema 5.2.

Demostración. (del Teorema 5.2)

Aserio 1. D tiene un entorno aislante P en $M - \mathcal{A}(K)$ que es positivamente invariante.

Prueba. Sea $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ la descomposición de D en sus componentes conexas (en cantidad finita por la Proposición 5.3), que son a su vez compactos invariantes aislados. Por la aditividad del índice de Conley es $0 = C\check{H}^1(D) \cong \bigoplus_{k=1}^n C\check{H}^1(D_k)$ y en consecuencia $C\check{H}^1(D_k) = 0 \forall 1 \leq k \leq n$.

Tomemos para cada $1 \leq k \leq n$ un bloque aislante conexo N_k para D_k , y elijamos la colección de modo que sean disjuntos dos a dos; es decir, $N_k \cap N_\ell = \emptyset$ si $k \neq \ell$. A continuación probaremos que cada $N_k - \mathcal{A}(K)$ es positivamente invariante, y en consecuencia $P := (N_1 \cup \dots \cup N_n) - \mathcal{A}(K)$ cumplirá la condición requerida. De la sucesión exacta en cohomología de Čech reducida

$$\dots \longrightarrow \check{H}^0(N_k) \longrightarrow \check{H}^0(N_k^s) \longrightarrow \check{H}^1(N_k, N_k^s) \longrightarrow \dots$$

deducimos que N_k^s es conexo porque $\check{H}^0(N_k) = 0$ (ya que N_k es conexo), $\check{H}^1(N_k, N_k^s) \cong C\check{H}^1(D_k) = 0$ por hipótesis y en consecuencia $\check{H}^0(N_k^s) = 0$. Ahora se observa que $\emptyset \neq D_k \subseteq \text{int}(N_k) \cap \partial \mathcal{A}(K)$, luego $\text{int}(N_k) \cap \mathcal{A}(K) \neq \emptyset$ y existen $p \in N_k \cap \mathcal{A}(K)$ y $t > 0$ tales que $p \cdot t \notin N_k$ (en otro caso, $p \cdot [0, +\infty) \subseteq N_k$ y $\emptyset \neq \omega(p) \subseteq N_k$, lo que es imposible porque $\omega(p) \subseteq K$ pero N_k aísla D_k , disjunto de K). Por tanto la semitrayectoria positiva $\gamma^+(p) \subseteq \mathcal{A}(K)$ de p debe cortar al conjunto de salida N_k^s y se sigue que $N_k^s \cap \mathcal{A}(K) \neq \emptyset$. Más aún, puesto que

$$\begin{aligned} N_k^s \cap D &= (N_k^s \cap D_1) \cup \dots \cup (N_k^s \cap D_n) \subseteq \\ &\subseteq (N_k \cap N_1) \cup \dots \cup (N_k^s \cap D_k) \cup \dots \cup (N_k \cap N_n) = \emptyset \end{aligned}$$

se concluye que el conjunto conexo N_k^s yace en la unión disjunta de los abiertos $\mathcal{A}(K)$ y $M - \overline{\mathcal{A}(K)}$, luego de hecho $N_k^s \subseteq \mathcal{A}(K)$. Por tanto $N_k - \mathcal{A}(K)$ es positivamente invariante ya que para cualquier $p \in N_k - \mathcal{A}(K)$ se tiene $\gamma^+(p) \subseteq M - \mathcal{A}(K)$ y esto evita que p salga de N_k , pues ya se probó que $N_k^s \subseteq \mathcal{A}(K)$.

Aserio 2. D tiene un entorno aislante Q en $\overline{\mathcal{A}(K)}$ que es negativamente invariante.

Prueba. Denotemos M_∞ la compactificación con un punto de M obtenida por adición del punto ideal ∞ , y extendamos el flujo a M_∞ haciendo que ∞ sea un punto fijo. Es claro que K es aún un atractor con la misma región de atracción $\mathcal{A}(K)$. Pongamos $D_\infty := \partial_{M_\infty} \mathcal{A}(K)$ para la frontera de $\mathcal{A}(K)$ en M_∞ , que verifica $D_\infty = D$ si $\overline{\mathcal{A}(K)}$ (la clausura de $\mathcal{A}(K)$ en M) es compacta o bien $D_\infty = D \cup \{\infty\}$ si no lo es. Tomemos una función de Lyapunov $\Phi : \mathcal{A}(K) \longrightarrow [0, +\infty)$ para el atractor K y extendámosla a $\overline{\mathcal{A}(K)}^{M_\infty}$ (la clausura de $\mathcal{A}(K)$ en M_∞) definiendo $\Phi(p) = +\infty$ para $p \in D_\infty$ (que esta extensión es continua es una consecuencia de la propiedad de no acotación uniforme de las funciones de Lyapunov).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $Q_n := \{p \in \overline{\mathcal{A}(K)}^{M_\infty} : \Phi(p) \geq n\}$ es un entorno aislante de D_∞ en $\overline{\mathcal{A}(K)}^{M_\infty}$ negativamente invariante. Si $\overline{\mathcal{A}(K)}$ es compacto, hemos acabado: $Q = Q_1$ sirve a nuestros propósitos porque $\overline{\mathcal{A}(K)}$ coincide con $\overline{\mathcal{A}(K)}^{M_\infty}$.

Supongamos entonces que no es el caso; $\overline{\mathcal{A}(K)}$ no es compacto. Elijamos abiertos disjuntos $U_\infty \supseteq \{\infty\}$, $U_D \supseteq D$ y un índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $Q_{n_0} \subseteq U_\infty \cup U_D$ (esto es posible porque $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base decreciente de entornos de $D_\infty = D \cup \{\infty\}$ y se asumió que D es compacto). Si ponemos $Q := Q_{n_0} \cap U_D = Q_{n_0} \cap (M_\infty - U_\infty)$, es fácil comprobar que Q es un entorno aislante negativamente invariante de D en $\overline{\mathcal{A}(K)}$.

Aserto 3. $N := P \cup Q$ es un bloque aislante regular de D en M .

Prueba. Es claro que $N^+ = P$ y $N^- = Q$, de donde la igualdad $N = N^+ \cup N^-$ se sigue de inmediato. Falta ver que N es ciertamente un entorno de D , pues que la inclusión $K \subseteq N$ es una equivalencia *shape* y que tanto N como N^e y N^s son ANR's compactos se argumenta igual que en el Teorema 4.4. Como P y Q son entornos de D en $M - \mathcal{A}(K)$ y $\overline{\mathcal{A}(K)}$ respectivamente, existen abiertos $M \supseteq U \supseteq D$ y $M \supseteq V \supseteq D$ tales que $P \supseteq U - \mathcal{A}(K)$ y $Q \supseteq V \cap \overline{\mathcal{A}(K)}$. Ahora $U \cap V$ es un abierto que contiene D y está contenido en N , porque si $p \in U \cap V$ pero $p \notin P$, entonces $p \in \mathcal{A}(K)$ ya que $P \supseteq U - \mathcal{A}(K)$, lo que implica $p \in V \cap \mathcal{A}(K) \subseteq Q$. \square

Corolario 5.4. *En las condiciones del Teorema 5.2, D tiene el shape de un poliedro finito. Además, su índice de Conley tiene el tipo de homotopía de un ANR punteado.*

Demostración. Es inmediata del Teorema 5.2. \square

En el Ejemplo 5.1 D no tenía *shape* poliedral porque separaba el plano en infinitas componentes, pero esto también implica en particular que no era un compacto invariante aislado. Pero una sencilla modificación de dicho ejemplo, que presentamos en el Ejemplo 5.5, demuestra que incluso aunque D sea un compacto invariante aislado, puede no tener *shape* poliedral (y en particular tampoco bloques aislantes regulares, por el corolario anterior).

Ejemplo 5.5. Nos apoyaremos en el Ejemplo 5.1 descrito más arriba. Con referencia al mismo, sea Q la clausura de $\mathcal{A}(p)$ en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Denotemos $C := Q \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$ el espacio obtenido al tomar el producto cartesiano de Q y $[-1, 1]$, que es un cilindro sólido del cual se han eliminado a su vez infinitos cilindros sólidos. La frontera de C está formada por $\partial Q \times [-1, 1]$ junto con las tapas superior e inferior de C , es decir, $Q \times \{-1, 1\}$. Hagamos que todo punto de D sea fijo y cualquier otro en C se aproxime a p , de modo que éste sea un atractor. Los puntos de fuera de C se mueven en trayectorias paralelas al eje z que vienen desde $z = -\infty$ y van hacia $z = +\infty$.

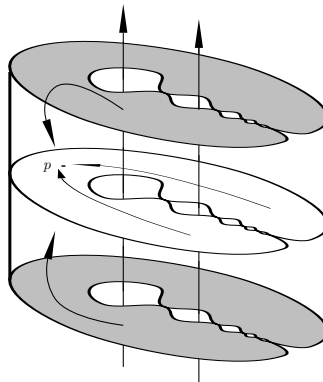


Figura 5.2: Frontera aislada con *shape* no poliedral.

Es claro que aquí D no tiene *shape* poliedral. De hecho, podemos calcular su índice de Conley 1-dimensional y comprobar que no es nulo, lo que concuerda con el Teorema 5.2. Como entorno aislante de D puede elegirse $N := B - \text{int}(B')$, donde $B \supseteq C$ es una 3-celda que contenga a C y B' es una pequeña 3-bola en torno a p . Una elección juiciosa de ambas hace que N sea un bloque aislante de D cuyo conjunto de salida inmediata N^s es la unión de B' y el hemisferio superior de B . Por tanto el cociente $(N/N^s, [N^s])$ tiene el mismo tipo de homotopía que el par $(\mathbb{S}^1, *)$ y $C\check{H}^1(D) \cong \mathbb{Z}$.

La misma construcción que acabamos de explicar funciona exactamente igual si se parte de la adherencia Q (siempre que sea compacta) de cualquier región de atracción in \mathbb{R}^n cuya frontera sea estacionaria para el flujo y no tenga *shape* poliedral, de modo que en realidad existen amplias familias de ejemplos que justifican aún más la necesidad de imponer alguna condición, como la expresada en el Teorema 5.2, para poder efectuar un análisis significativo.

5.2. Implicaciones sobre la dinámica global

Abordamos en esta sección la cuestión de qué consecuencias tiene la hipótesis efectuada sobre D en lo que se refiere a la dinámica global en el espacio de fases. El punto de partida para ello es la prueba del Teorema 5.2, en que se puede observar que la clave es que D repele los puntos de $\mathcal{A}(K) - K$ y atrae los de fuera de $\overline{\mathcal{A}(K)}$, lo cual sugiere que este último conjunto será un atractor en M . Este es el caso supuesto que sea compacto.

Proposición 5.6. *En las condiciones del Teorema 5.2, si $\overline{\mathcal{A}(K)}$ es compacto entonces es un atractor estable en M .*

Demostración. Sea $N = \overline{\mathcal{A}(K)} \cup P$, donde P es un entorno positivamente invariante de D en $M - \mathcal{A}(K)$ (su existencia fue establecida en el Aserto 1. del Teorema 5.2). Es claro que N es un entorno compacto de $\overline{\mathcal{A}(K)}$ y, puesto que es la unión de dos conjuntos positivamente invariantes, es también positivamente invariante. Además es inmediato que N aísla $\overline{\mathcal{A}(K)}$, y se concluye entonces que este último es un atractor en M . \square

En adelante supondremos que M es compacto, para garantizar de manera automática que $\overline{\mathcal{A}(K)}$ sea compacto a su vez. Por otro lado, obsérvese que la hipótesis de que M fuese un ANR sólo se utilizó en el Aserto 3. de la demostración del Teorema 5.2, de modo que la Proposición 5.6 es de hecho cierta aunque M no sea un ANR. Así sucede también con el Teorema 5.7, que da una descripción de la situación dinámica global:

Teorema 5.7. *Sea K un atractor en un espacio de fases compacto M . Supongamos que $D := \partial\mathcal{A}(K)$ es un conjunto aislado cuyo índice cohomológico de Conley 1-dimensional satisface $C\check{H}^1(D) = 0$. Entonces existe un repulsor uniforme K^* en M tal que $\partial\mathcal{R}(K^*) = \partial\mathcal{A}(K)$ y $M = \mathcal{A}(K) \cup D \cup \mathcal{R}(K^*)$, donde la unión es disjunta.*

Demostración. En virtud de la Proposición 5.6, el conjunto compacto $\overline{\mathcal{A}(K)}$ es un atractor en M y en consecuencia tiene un repulsor dual K^* . Recordemos aquí que $K^* := \{p \in M : \omega(p) \cap \overline{\mathcal{A}(K)} = \emptyset\}$, y coincide con el conjunto de puntos de M que no son atraídos por $\overline{\mathcal{A}(K)}$ (véase [66] para una exposición detallada de estos resultados). Ahora $\{K^*, \overline{\mathcal{A}(K)}\}$ es una descomposición de Morse de M ([66, Lemma 3.2. y Proposition 3.4.iv., pp. 8 y 10]) y en consecuencia $\mathcal{R}(K^*) = M - \overline{\mathcal{A}(K)}$, de modo que $\partial\mathcal{R}(K^*) =$

$\partial\overline{\mathcal{A}(K)} = \partial\mathcal{A}(K) = D$. Para terminar la demostración sólo hace falta observar que $\mathcal{A}(K) \cap \mathcal{R}(K^*) = \emptyset$. Y, en efecto, si fuese $p \in \mathcal{A}(K) \cap \mathcal{R}(K^*)$, entonces $\emptyset \neq \alpha(p) \subseteq D$ (puesto que $p \in \mathcal{A}(K) \subseteq \overline{\mathcal{A}(K)}$ y este conjunto es compacto e invariante) pero, por otro lado, $\alpha(p) \subseteq K^*$ (porque $p \in \mathcal{R}(K^*)$). En consecuencia $D \cap K^* \supseteq \alpha(p) \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que D es la frontera de $\mathcal{R}(K^*)$, que es un entorno de K^* en M . \square

La condición $C\check{H}^1(D) = 0$ es suficiente para que se de la situación descrita en el Teorema 5.7, pero no es necesaria. Esto lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.8. El espacio de fases es \mathbb{S}^3 , en el que pensaremos como \mathbb{R}^3 compactificado con un punto en el infinito. Pongamos el origen p como atractor estable en la bola unidad B , cuya frontera constará de puntos fijos. Ahora pellizquemos dos pequeños cuernos de B hasta que sean tangentes entre sí, como muestra la Figura 5.3. Entonces la región de atracción de p es una 3-celda abierta y su clausura es la bola con cuernos, que tiene el mismo tipo de homotopía que un toro sólido. Su complemento en \mathbb{S}^3 es otro toro sólido y es fácil completar el flujo de modo que el repulsor dual de p sea la circunferencia central del mismo, K^* . No obstante aquí $C\check{H}^1(D) = \mathbb{Z}$, lo cual puede comprobarse por cálculo directo o mediante la Proposición 5.9 que se prueba más abajo.

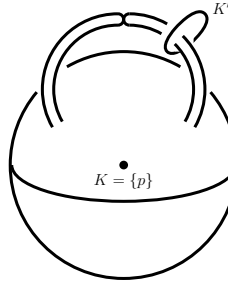


Figura 5.3: Un punto atractor y su circunferencia dual.

En definitiva, la condición $C\check{H}^1(D) = 0$ es suficiente, pero no necesaria, para que el espacio de fases tenga una descomposición como unión de las regiones de atracción de K , su frontera, y la región de repulsión de K^* . Aun así, el índice de Conley of D juega un papel importante en esta situación: es claro que K no determina unívocamente K^* (el Ejemplo 5.8 puede modificarse de modo que para el mismo K , un punto de equilibrio, su repulsor dual sea un *bouquet* de un número cualquiera de circunferencias), pero es posible establecer estrechas relaciones entre la homología de K , de K^* y el índice de Conley de D . Esto queda ilustrado por la Proposición 5.9 y el corolario que la sigue:

Proposición 5.9. Sean $K, K^* \subseteq \mathbb{S}^n$ un atractor y un repulsor uniformes respectivamente cuyas regiones de atracción y repulsión $\mathcal{A}(K)$ y $\mathcal{R}(K^*)$ tienen frontera común D y tales que $\mathbb{S}^n = \mathcal{A}(K) \cup D \cup \mathcal{R}(K^*)$. Si K tiene shape trivial, entonces $\check{H}_k(K^*) = CH^{n-k-1}(D)$ (que D es un compacto invariante aislado es consecuencia de las restantes hipótesis).

Demostración. Sean $\Phi : \overline{\mathcal{A}(K)} \longrightarrow [0, +\infty]$ y $\Psi : \overline{\mathcal{R}(K^*)} \longrightarrow [0, +\infty]$ funciones de Lyapunov para K y K^* extendidas como $+\infty$ a D . Puesto que sus dominios sólo intersecan en D (recuérdese que $\mathcal{A}(K) \cap \mathcal{R}(K^*) = \emptyset$ necesariamente, como en la prueba

de la Teorema 5.7) y ambas toman allí el valor $+\infty$, pueden pegarse para dar una función bien definida y continua $H : \mathbb{S}^n \rightarrow [0, +\infty]$ con las siguientes propiedades: (i.) $H^{-1}(+\infty) = D$, (ii.) $H^{-1}(0) = K \cup K^*$ y (iii.) H es estrictamente decreciente en las trayectorias contenidas en $\mathcal{A}(K) - K$ y estrictamente creciente en las trayectorias contenidas en $\mathcal{R}(K^*) - K^*$.

Para calcular el índice de Conley de D elegiremos un bloque aislante adecuado, que describimos a continuación (lo que prueba, en particular, que D es un compacto invariante aislado). Sea $N := \{p \in \mathbb{S}^n : H(p) \geq 1\}$, que es un entorno compacto de D porque H es continua. La propiedad (iii.) asegura que N es un bloque aislante de D cuyo conjunto de salida es precisamente

$$N^s = \{p \in \mathcal{A}(K) : H(p) = 1\} = \{p \in \mathcal{A}(K) : \Phi(p) = 1\}.$$

Pongamos también

$$U_1 := \{p \in \mathcal{A}(K) : H(p) < 1\}, \quad U_2 := \{p \in \mathcal{A}(K) : H(p) < 2\}$$

y

$$V_1 := \{p \in \mathcal{R}(K^*) : H(p) < 1\}.$$

Obsérvese que las inclusiones $K \subseteq U_1 \subseteq U_2$ y $K^* \subseteq V_1$ son todas equivalencias *shape* porque U_1 y U_2 son entornos positivamente invariantes de K y V_1 es un entorno negativamente invariante de K^* . En particular U_1 y U_2 tienen *shape* trivial.

Ya estamos en condiciones de efectuar los cálculos. Tenemos que

$$\check{H}_k(K^*) = \check{H}_k(V_1) = \check{H}_k(\mathbb{S}^n - (U_2 \cup N)) = \check{H}^{n-k-1}(U_2 \cup N)$$

porque $K^* \subseteq V_1$ es una equivalencia *shape* y además se aplica la dualidad de Alexander. Como U_2 tiene *shape* trivial,

$$\check{H}^{n-k-1}(U_2 \cup N) = \check{H}^{n-k-1}(U_2 \cup N, U_2) = \check{H}^{n-k-1}(N, U_2 - U_1),$$

donde el último isomorfismo es por escisión. Ahora, $U_2 - U_1$ retracts por deformación fuerte sobre N^s , y en consecuencia $\check{H}_k(K^*) = \check{H}^{n-k-1}(N, N^s) = C\check{H}^{n-k-1}(D)$. \square

Corolario 5.10. *Sea $K \subseteq \mathbb{S}^3$ un atractor estable con shape trivial y supongamos que la frontera D de su región de atracción es un compacto invariante aislado que satisface $C\check{H}^1(D) = 0$. Entonces K^* , el repulsor dual de $\mathcal{A}(K)$, tiene una cantidad finita de componentes cada una de las cuales tiene shape trivial. Si $C\check{H}^2(D) = 0$ entonces K^* tiene shape trivial.*

Demostración. Comencemos comprobando que los grupos de homología de cada componente de K^* son triviales. Por la Proposición 5.9 y la hipótesis, $\check{H}_1(K^*) \cong C\check{H}^1(D) = 0$. Además, de la sucesión exacta obtenida en el Aserto 1. de la prueba del Teorema 5.2 se sigue que $C\check{H}^0(D) = 0$, y de una nueva aplicación de la Proposición 5.9 se deduce que $\check{H}_2(K^*) \cong C\check{H}^0(D) = 0$.

Si C es una componente de K^* (que sólo tiene una cantidad finita de ellas porque K^* es un repulsor uniforme en un ANR), sus grupos de homología son sumandos directos de los de K^* , y por tanto triviales. En virtud de [40, Theorem 4.5., p. 181], para probar que C tiene *shape* trivial bastará comprobar que $(C, *)$ es 1-movible para alguna elección de punto base $* \in C$. Esto lo haremos como sigue: en primer lugar,

como C tiene el *shape* de un poliedro finito (porque es una componente de K^* , que lo tiene por ser repulsor en un ANR), es un FANR (*fundamental absolute neighbourhood retract* en la terminología de Borsuk [12]) por [45, Theorem 14., p. 234]. Para cualquier elección de punto base $*$ en C , el espacio punteado $(C, *)$ es también un FANR (esto es [45, Theorem 19., p. 236], consecuencia de los trabajos de Hastings y Heller [33]). Por último, todo FANR punteado es movable ([45, Theorem 18., p. 235]). Así $(C, *)$ es 1-movable, lo cual concluye la prueba de que C tiene *shape* trivial.

La última afirmación del enunciado se sigue nuevamente de la Proposición 5.9, porque $\check{H}_0(K^*) \cong C\check{H}^2(D)$ y en consecuencia si $C\check{H}^2(D) = 0$ necesariamente K^* es conexo y por tanto tiene *shape* trivial. \square

Observación 5.11. *El recíproco de la última afirmación del Corolario 5.10 también es cierto: si $K \subseteq \mathbb{S}^3$ es un atractor estable con *shape* trivial y existe un repulsor uniforme $K^* \subseteq \mathbb{S}^3$ tal que $\mathbb{S}^3 = \mathcal{A}(K) \cup D \cup \mathcal{R}(K^*)$ y toda componente de K^* tiene *shape* trivial, entonces $C\check{H}^1(D) = 0$. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 5.9 y muestra una situación en la que la condición impuesta sobre el índice de Conley de D es suficiente para caracterizar la dinámica de una amplia familia de sistemas dinámicos en \mathbb{S}^3 .*

Capítulo 6

Sobre el *shape* del borde de un atractor

Introducción. Ya se ha utilizado en repetidas ocasiones que la inclusión de un atractor estable K en cualquier entorno compacto positivamente invariante suyo P contenido en $\mathcal{A}(K)$ es una equivalencia *shape* (es un resultado debido a Hastings [32] que se deriva del Lema 0.1, como señalamos a continuación del mismo en el capítulo sobre Requisitos). Parece entonces natural preguntarse si puede establecerse alguna relación entre los *shapes* de ∂P y ∂K , las fronteras topológicas de ambos.

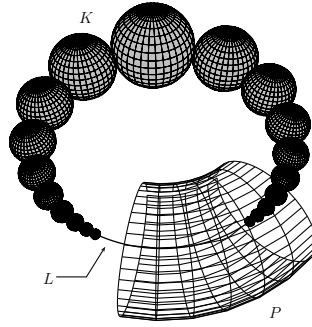
El artículo de Robinson y Tearne [63] contiene una demostración de la igualdad $\omega(P) = \partial K$, que es una conexión de naturaleza dinámica. Aquí mostraremos con ejemplos que no puede irse más allá, en el sentido que no pueden esperarse, *a priori*, relaciones de dominación en ninguno de los sentidos (es decir, ni $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$ ni al revés). En el Teorema 6.6 se introduce una condición adicional que garantiza la dominación $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$, y en los Corolarios 6.7 y 6.8 se presentan dos situaciones naturales en que dicha condición se satisface.

La dominación en sentido inverso $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$ es especialmente interesante, porque ∂P tiene *shape* poliedral siempre que el espacio de fases sea un ANR (esto se prueba en el Corolario 6.3 usando, esencialmente, técnicas de bloques aislantes regulares muy similares a las del capítulo anterior).

El trabajo contenido aquí es conjunto con J. M. R. Sanjurjo, véase [72].

En lo sucesivo K será un atractor estable en algún espacio de fases M (siempre metrizable y localmente compacto). Reservaremos la letra P para denotar un entorno compacto y positivamente invariante de K contenido en $\mathcal{A}(K)$. Comenzaremos mostrando, como anunciamos más arriba, que en un caso general no puede esperarse ninguna relación entre $\text{Sh}(\partial P)$ y $\text{Sh}(\partial K)$.

Ejemplo 6.1. Sean $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un toro sólido y K un “collar” $K \subseteq \text{int}(P)$ que consta de infinitas bolas sólidas, centradas en la circunferencia L , tangentes cada una a la siguiente y cuyo radio vaya decreciendo (véase la Figura 6.1). No es difícil construir un flujo diferenciable que entra en P transversalmente a través de ∂P y tiene a K por atractor estable. Aquí ∂K consta de una cantidad infinita de 2-esferas tangentes cada una a la siguiente y $\check{H}^1(\partial K) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $\check{H}^2(\partial K)$ no es finitamente generado. Por tanto, como $\check{H}^1(\partial P) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\check{H}^2(\partial P) \cong \mathbb{Z}$, ni ∂K domina ∂P ni tampoco al revés.

Figura 6.1: Un atractor K con ∂K complicado.

6.1. Sobre el *shape* de ∂P

Puede ser sensato dedicar una sección preliminar a estudiar someramente algunas propiedades topológicas básicas de ∂P , donde $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ es un entorno compacto positivamente invariante de un atractor estable K . Una primera cuestión es hasta qué punto ∂P está unívocamente determinado por K , puesto desde luego su tipo topológico no lo está. La siguiente proposición responde a esta pregunta:

Proposición 6.2. *Sean K un atractor estable en M y $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ un entorno de K compacto y positivamente invariante. Entonces $\text{Sh}(\partial P) = \text{Sh}(\Sigma) = \text{Sh}(\mathcal{A}(K) - K)$, donde $\Sigma \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ es cualquier sección topológica del flujo en $\mathcal{A}(K) - K$.*

Demostración. Es fácil demostrar, utilizando técnicas análogas a las empleadas para construir funciones de Lyapunov, que existe una función continua $\Phi : \mathcal{A}(K) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que (i.) $\Phi(p) = 0 \Leftrightarrow p \in P$ y (ii.) $\Phi(p \cdot t) < \Phi(p)$ siempre que $p \cdot [0, t] \subseteq \mathcal{A}(K) - P$. Sea, además, U un entorno abierto precompacto de ∂P cuya adherencia esté contenida en $\mathcal{A}(K)$.

Aserto 1. Existe una sección topológica $\Sigma_e \subseteq U$ de $\mathcal{A}(K) - K$ disjunta con P (de ahí el subíndice e de Σ_e , por “exterior”) tal que $\Sigma_e \cdot [0, +\infty) \subseteq P \cup U$.

Prueba. Sea $V := P \cup U$, que es un entorno precompacto de P , y pongamos $\mu := \min \Phi|_{\partial V}$. Como $\Phi|_{\partial V} > 0$ y ∂V es compacto, se sigue que $\mu > 0$ y por tanto $\Sigma_e := \Phi^{-1}(\frac{1}{2}\mu)$ es compacto y disjunto con P (donde Φ se anula). Probemos ahora que Σ_e es una sección topológica y $\Sigma_e \cdot [0, +\infty) \subseteq V$.

Para ver que Σ_e es una sección topológica de $\mathcal{A}(K) - K$ será suficiente demostrar que es sección conjuntista, porque es compacta y $\mathcal{A}(K) - K$ es paralelizable. Si existiese algún punto en $\mathcal{A}(K) - K$ cuya trayectoria cortase al menos dos veces a Σ_e , podrían encontrarse $p \in \Sigma_e$ y $t > 0$ tales que $p \cdot t \in \Sigma_e$, pero entonces $p \cdot [0, t] \subseteq \mathcal{A}(K) - P$ porque P es positivamente invariante y Σ_e es disjunto con él, de modo que por (ii.) sería $\frac{1}{2} = \Phi(p \cdot t) < \Phi(p) = \frac{1}{2}$, lo que es absurdo. Por otro lado, la trayectoria de cualquier $p \in \mathcal{A}(K) - K$ corta a Σ_e . Si no fuese el caso, $\Phi(p \cdot t) \neq \frac{1}{2}\mu$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero como $\Phi(p \cdot t) = 0$ para t suficientemente grande (en cuanto $p \cdot t$ haya entrado en P), debe ser $\Phi(p \cdot t) < \frac{1}{2}\mu \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces $\gamma(p) \cap \partial V = \emptyset$ por la elección de μ , luego $\gamma(p) \subseteq V$ y $\emptyset \neq \alpha(p) \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{A}(K)$, lo que implica $p \in K$ porque \overline{K} aísla a K .

Por último, la afirmación de que $\Sigma_e \cdot [0, +\infty) \subseteq V$ se puede argumentar como sigue: si existiesen $p \in \Sigma_e$ y $t \geq 0$ tales que $p \cdot t \notin V$, entonces (como V es un entorno de

K) para algún $0 \leq t \leq s$ sería $p \cdot [t, s] \subseteq \mathcal{A}(K) - V$ y $p \cdot s \in \partial V$. Pero ello implica $\mu \leq \Phi(p \cdot s) \leq \Phi(p \cdot t) \leq \Phi(p) = \frac{1}{2}\mu$, lo que contradice que $\mu > 0$.

Si se observa que $P^* := \mathcal{A}(K) - \text{int}(P)$ es un conjunto cerrado negativamente invariante y (con algún cuidado adicional, pues P^* no tiene por qué ser compacto) que existe una función $\Phi^* : \mathcal{A}(K) - K \rightarrow [0, +\infty)$ que se anula exactamente en P^* y es estrictamente creciente a lo largo de los segmentos de trayectoria contenidos en $\mathcal{A}(K) - (K \cup P^*)$, un argumento dual al del Aserto 1. establece ahora el

Aserto 2. Existe una sección topológica $\Sigma_i \subseteq U$ de $\mathcal{A}(K) - K$ tal que $\Sigma_i \subseteq \text{int}(P)$ (de ahí el subíndice i , de “interior”) tal que $\Sigma_i \cdot (-\infty, 0] \cap \text{int}(P) \subseteq U$.

Aserto 3. Existen secciones $\Sigma_e, \Sigma_i \subseteq U$ de $\mathcal{A}(K) - K$ tales que el conjunto comprendido entre ellas,

$$[\Sigma_e, \Sigma_i] = \{p \in \mathcal{A}(K) : p \cdot t_e \in \Sigma_e \text{ y } p \cdot t_i \in \Sigma_i \text{ para algunos } t_e \leq 0 \leq t_i\}$$

es un entorno compacto de ∂P contenido en U y la inclusión $[\Sigma_e, \Sigma_i] \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ es una equivalencia de homotopía.

Prueba. Obsérvese antes de nada que los reales $t_e(p) \leq 0 \leq t_i(p)$ tales que $p \cdot t_e(p) \in \Sigma_e$ y $p \cdot t_i(p) \in \Sigma_i$ están unívocamente determinados por p y además dependen continuamente de él, porque Σ_e y Σ_i son secciones de $\mathcal{A}(K) - K$. Lo mismo puede afirmarse, naturalmente, del único $t(p)$ tal que $p \cdot t(p) \in \Sigma$.

Para cualquier $p \in \partial P \subseteq P$ la invariancia positiva de P implica que $p \cdot [0, +\infty) \subseteq P$ y como $\Sigma_e \cap P = \emptyset$ y $p \cdot t_e(p) \in \Sigma_e$, se sigue que $t_e(p) < 0$. Además, $\text{int}(P)$ es también positivamente invariante y $p \cdot t_i(p) \in \Sigma_i \subseteq \text{int}(P)$, de modo que $t_i(p) > 0$. Todo esto implica que $\partial P \subseteq \{p \in \mathcal{A}(K) - K : t_e(p) < 0 < t_i(p)\}$, que es claramente un abierto contenido en $[\Sigma_e, \Sigma_i]$, y establece que $[\Sigma_e, \Sigma_i]$ es un entorno de ∂P .

Con vistas a probar la compacidad de $[\Sigma_e, \Sigma_i]$, afirmamos que $A := \{p \cdot s : p \in \Sigma_e, 0 \leq s \leq t_i(p)\}$ no es más que una descripción alternativa de $[\Sigma_e, \Sigma_i]$. En efecto, para cualquier $p \in \Sigma_e$ y $0 \leq s \leq t_i(p)$ tenemos $t_e(p \cdot s) = t_e(p) - s = -s \leq 0$ y $t_i(p \cdot s) = t_i(p) - s \geq 0$, de modo que $p \cdot s \in [\Sigma_i, \Sigma_e]$ y esto prueba el contenido $A \subseteq [\Sigma_e, \Sigma_i]$. Recíprocamente, si $q \in [\Sigma_i, \Sigma_e]$, haciendo $p := q \cdot t_e(q) \in \Sigma_e$ y $s := -t_e(q)$ se tiene la desigualdad $t_i(p) = t_i(q) - t_e(q) \geq -t_e(q) = s$, lo que junto con $q = p \cdot s$ implica que $q \in A$. Implies that $y \in A$. In a dual fashion it can be shown that $[\Sigma_e, \Sigma_i] = \{p \cdot s : p \in \Sigma_i, t_e(p) \leq s \leq 0\}$.

Podemos ahora probar fácilmente que $[\Sigma_e, \Sigma_i]$ es compacto y está contenido en U . Denotando $R := \max t_i|_{\Sigma_e}$, es claro por el párrafo anterior que $[\Sigma_e, \Sigma_i] \subseteq \Sigma_e \cdot [0, R]$ es un cerrado (por la continuidad de t_e y t_i) en el compacto $\Sigma_e \cdot [0, R]$, luego es compacto. Además, $[\Sigma_e, \Sigma_i] - P \subseteq \Sigma_e \cdot [0, +\infty) - P \subseteq (P \cup U) - P \subseteq U$ y análogamente $[\Sigma_e, \Sigma_i] \cap \text{int}(P) \subseteq \Sigma_i \cdot (-\infty, 0] \cap \text{int}(P) \subseteq U$, de modo que $[\Sigma_e, \Sigma_i] \subseteq U$.

Por último, la inclusión $[\Sigma_i, \Sigma_e] \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ es una equivalencia de homotopía porque hay una retracción por deformación fuerte

$$H(p, \tau) := \begin{cases} p \cdot (t_e(p)\tau) & \text{si } t_e(p) > 0, \\ p & \text{si } t_e(p) \leq 0 \leq t_i(p), \\ p \cdot (t_i(p)\tau) & \text{si } t_i(p) < 0, \end{cases}$$

de $\mathcal{A}(K) - K$ sobre $[\Sigma_i, \Sigma_e]$.

Completamos ya la prueba de la proposición. Por el Aserto 3. existe una base decreciente de entornos de K , que llamaremos $(A_k)_{k=1}^\infty$, formada por conjuntos de la forma $[\Sigma_e, \Sigma_i]$. Cada inclusión $A_{k+1} \subseteq A_k$ es una equivalencia de homotopía, porque lo son $A_k, A_{k+1} \subseteq \mathcal{A}(K) - K$. Ahora, como $\mathcal{A}(K) - K$ es homeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$, tiene el mismo tipo de homotopía que Σ y por tanto $\partial P = \bigcap_{k=1}^\infty A_k$ es el límite inverso de una sucesión de espacios compactos que están ligados por inclusiones que son equivalencias de homotopía. Entonces $\text{Sh}(\partial P) = \text{Sh}(A_k) = \text{Sh}(\Sigma) = \text{Sh}(\mathcal{A}(K) - K)$. \square

Se concluye entonces que, aunque el tipo topológico de ∂P no esté determinado, sí lo está su *shape*. Además, una útil consecuencia que se deriva inmediatamente del resultado que acabamos de probar es la siguiente:

Corolario 6.3. *Sean K un atractor estable en un ANR M . Si $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ es un entorno de K compacto y positivamente invariante, ∂P posee una base de bloques aislantes regulares (en el sentido de la Definición 4.3). En particular, ∂P tiene el shape de un poliedro finito.*

Demostración. Los conjuntos A_k construidos en la demostración de la Proposición 6.2 lo son. \square

En particular, de aquí se deduce que la dominación $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$ implicará, cuando el espacio de fases sea un ANR, que ∂K está dominado por un poliedro compacto. Dada la extrema complejidad que puede presentar este último conjunto, será necesario imponer alguna condición fuerte para conseguir algún resultado positivo en esta dirección (véase la sección 6.3).

Otra aplicación de la Proposición 6.2 permite establecer relaciones de naturaleza homológica entre K y ∂P . Compárese con el Corolario 6.7.

Corolario 6.4. *Sea K un atractor estable en una n -variedad topológica sin borde y orientable M . Supongamos que $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ es un entorno compacto y positivamente invariante de K . Entonces existe una sucesión exacta*

$$\dots \longrightarrow \check{H}^{n-(k+1)}(K) \longrightarrow \check{H}_k(\partial P) \longrightarrow \check{H}_k(K) \longrightarrow \dots$$

en homología y cohomología no reducidas.

Demostración. Como $\mathcal{A}(K)$ es una n -variedad orientable (por ser abierta en M), por dualidad de Alexander ([78, Theorem 6.2.17.]) hay un isomorfismo $H_k(\mathcal{A}(K), \mathcal{A}(K) - K) = \check{H}^{n-k}(K)$ y en consecuencia la sucesión exacta larga en homología del par $(\mathcal{A}(K), K)$ da lugar a

$$\dots \longrightarrow \check{H}_k(\mathcal{A}(K) - K) \longrightarrow \check{H}_k(\mathcal{A}(K)) \longrightarrow \check{H}^{n-k}(K) \longrightarrow \dots$$

Por la Proposición 6.2 y el hecho de que $\text{Sh}(K) = \text{Sh}(\mathcal{A}(K))$, se tiene que $\check{H}_k(\partial P) = \check{H}_k(\mathcal{A}(K) - K)$ y $\check{H}_k(K) = \check{H}_k(\mathcal{A}(K))$. Sustituyendo en la sucesión de arriba se tiene el resultado. \square

6.2. Condiciones suficientes para que $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$

Si hay una manera natural de mover puntos desde ∂P hacia ∂K (simplemente empujándolos con el flujo), no es fácil definir un morfismo en sentido inverso para obtener una dominación *shape*. Se necesita alguna estructura adicional, y esto es lo que presentamos en la siguiente

Definición 6.5. Sea $P \subseteq M$ un compacto. Una *espina homotópica* para P es un compacto $L \subseteq \text{int}(P)$ tal que la inclusión $i : \partial P \rightarrow P - L$ es una equivalencia de homotopía.

Las nociones de *espina* y *pseudoespina* de una variedad hacen frecuente aparición en la literatura matemática, pero no parece haber una definición comúnmente aceptada de las mismas. No obstante, parece que cualquiera de las definiciones clásicas que pueden encontrarse implican que una espina o una pseudoespina es una espina homotópica, de modo que esta última noción es la más débil de las tres. Aun así, es suficiente para nuestros propósitos:

Teorema 6.6. Sean K un atractor estable en M y $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ un entorno compacto y positivamente invariante de K . Supongamos que $\text{int}(K)$ contiene una espina homotópica L de P . Entonces $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$.

Demostración. Considérese una base de entornos abiertos

$$P - L \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_k \supseteq \dots \supseteq \partial K$$

de ∂K en M . Cada unión $U_k := W_k \cup K$ es un entorno abierto de K en M y, puesto que P está contenido en la región de atracción de K , existe una sucesión creciente de tiempos no negativos $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $P \cdot [t_k, +\infty) \subseteq U_k$. Más aún, como $M - K$ es invariante por el flujo y $\partial P \subseteq M - K$, necesariamente $\partial P \cdot [t_k, +\infty) \subseteq U_k \cap (M - K) \subseteq W_k$. Por tanto, poniendo $f_k(p) := p \cdot t_k$ para $p \in \partial P$ se obtiene una sucesión $f_k : \partial P \rightarrow W_k$ que definen una aplicación aproximativa $f : \partial P \rightarrow \partial K$ (*approximative map* en la terminología de Borsuk, [12]).

Como P es positivamente invariante,

$$j_k \circ f_k \simeq i,$$

donde $j_k : W_k \subseteq P - L$ e $i : \partial P \subseteq P - L$ son las inclusiones. Por otro lado, como L es una espina homotópica de P , la inclusión i es una equivalencia de homotopía y tiene una inversa de homotopía $r : P - L \rightarrow \partial P$ que induce, por restricción, una aplicación $g := r|_{\partial K} : \partial K \rightarrow \partial P$. Se tiene así que $r|_{W_k} \circ f_k : \partial P \rightarrow \partial P$ es una aplicación aproximativa para la composición $g \circ f$ y además

$$r|_{W_k} \circ f_k = r \circ j_k \circ f_k \simeq r \circ i \simeq \text{id}_{\partial P},$$

de donde se concluye que $g \circ f = \text{id}_{\partial P}$ en la categoría *shape*. Esto prueba que $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$ y completa la demostración. \square

El siguiente corolario es un ejemplo de una situación natural en que se puede aplicar el Teorema 6.6:

Corolario 6.7. *Sea K un atractor estable en \mathbb{R}^n contenido en el interior de una n -bola positivamente invariante B . Si $\text{int}(K) \neq \emptyset$ entonces $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\mathbb{S}^{n-1})$. En particular, así sucede si K tiene shape trivial y $n \leq 3$.*

Demostración. Cualquier punto contenido en el interior de K es una espina homotópica para B . La segunda afirmación se sigue del Corolario 2.2. \square

Otra situación que ilustra las posibilidades de aplicación del Teorema 6.6 es la descrita a continuación:

Corolario 6.8. *Sea K un atractor estable en M tal que ∂K puede ser bicollarada. Entonces $\text{Sh}(\partial K) \geq \text{Sh}(\partial P)$ para cualquier entorno compacto y positivamente invariante $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ de K .*

Las hipótesis del Corolario 6.8 se dan, por ejemplo, si M es una variedad diferenciable orientada y ∂K es una hipersuperficie orientable (el argumento es el mismo que en la prueba del Teorema 4.32).

Demostración. Será conveniente comenzar con la siguiente observación, que tendremos ocasión de usar más veces:

Observación 6.9. *Una de las consecuencias de la Proposición 6.2, y con la misma notación e hipótesis que allí, es que permite suponer, a la hora de probar resultados acerca de $\text{Sh}(\partial P)$, que P es especialmente bueno. Por ejemplo, si $\Sigma \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ es cualquier sección compacta de $\mathcal{A}(K) - K$, el conjunto $Q := K \cup \Sigma \cdot [0, +\infty)$ es un entorno de K compacto y positivamente invariante con $\partial Q = \Sigma$.*

Para demostrar el Corolario 6.8 podemos entonces suponer, sin pérdida de generalidad, que ∂P es una sección del flujo en $\mathcal{A}(K) - K$. Sea $\text{int}(P) \supseteq U \supseteq \partial K$ el bicollar de ∂K , lo que expresado con precisión significa que existe un homeomorfismo $h : \partial K \times (-1, 1) \rightarrow U$ tal que $h(p, 0) = p \forall p \in \partial K$ y U es un entorno abierto de ∂K . Denotemos $\frac{1}{2}U$ la imagen por h del conjunto $\partial K \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es la mitad del bicollar U : es sencillo construir un homeomorfismo $k : P \rightarrow P$ tal que $k(K \cup \frac{1}{2}U) \subseteq K$ y k es la identidad fuera de U . Además, como $K \cup \frac{1}{2}U$ es abierto en P , el conjunto $k(K \cup \frac{1}{2}U)$ es también abierto en P y por tanto $k(K \cup \frac{1}{2}U) \subseteq \text{int}_P(K) = \text{int}(K)$.

Ahora $K \cup \frac{1}{2}U$ es un entorno abierto de K , luego existe $T > 0$ tal que $P \cdot [T, +\infty) \subseteq K \cup \frac{1}{2}U$. Sea

$$L := k(P \cdot [T, +\infty)) \subseteq k\left(K \cup \frac{1}{2}U\right) \subseteq \text{int}(K),$$

que es claramente un conjunto compacto. Afirmamos que L es una espina homotópica para P , lo que en virtud del Teorema 6.6 será suficiente para concluir la prueba del corolario. Y en efecto, la hipótesis de que ∂P es una sección del flujo implica que $P - P \cdot [T, +\infty) = \partial P \cdot [0, T)$, que retracta por deformación fuerte sobre ∂P , de modo que la inclusión $\partial P \subseteq P - P \cdot [T, +\infty)$ es una equivalencia de homotopía. A su vez, $\partial P = k(\partial P) \subseteq k(P - P \cdot [T, +\infty)) = P - L$ es también una equivalencia de homotopía y por tanto L es una espina homotópica para P . \square

Que la espina L esté contenida en el interior de K es necesario. En el Ejemplo 6.1 K contiene una espina homotópica de P (la circunferencia central L) pero no se satisface la relación de dominación. Obsérvese, en cualquier caso, que la presencia de bolas progresivamente más pequeñas impide que se pueda encontrar una espina contenida

en el interior de K . El caso extremo sería que K tuviese interior vacío, de manera que $\partial K = K$, y en este contexto también pueden establecerse relaciones entre ∂P y ∂K , aunque de naturaleza cohomológica:

Proposición 6.10. *Sea K un atractor estable conexo en una n -variedad topológica sin borde y orientable M . Supongamos que $\text{int}(K) = \emptyset$ y sea r el número de componentes conexas de P , donde $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ es cualquier entorno compacto positivamente invariante de K . Si $\check{H}_1(K) = 0$, entonces $\check{H}^{n-1}(K) = \check{H}_{n-1}(K) = \mathbb{Z}^{r-1}$.*

Demostración. Por la Proposición 6.2, el Corolario 6.3 y la Observación 6.9 podemos asumir que tanto P como ∂P son ANR's y además este último es una sección topológica de $\mathcal{A}(K) - K$.

Aserto. Se tiene que

$$H^k(P, \partial P) = H_c^k(P - \partial P) = H_{n-k}(P),$$

es decir, dualidad de Lefschetz para P .

Prueba. Por ser P y ∂P ANR's, el segundo es tenso (*taut*) en el primero y por tanto (véase [78]) $H^k(P, \partial P) = H_c^k(P - \partial P)$. Además, $P - \partial P$ es abierto en M , y por tanto n -variedad orientable sin borde, luego por dualidad de Poincaré es $H_c^k(P - \partial P) = H_{n-k}(P - \partial P)$. Sólo queda comprobar que este último grupo es isomorfo a $H_{n-k}(P)$.

Obsérvese que $P - \partial P$ es positivamente invariante, y por el Lema 0.1 se tiene que $K \subseteq P - \partial P$ es una equivalencia *shape*, como también lo es $K \subseteq P$ por el mismo motivo. En definitiva, $P - \partial P \subseteq P$ es una equivalencia *shape*, y en consecuencia de homotopía, porque los dos espacios involucrados son ANR's. Así $H_{n-k}(P - \partial P) = H_{n-k}(P)$, y esto concluye la prueba del Aserto.

Probemos que $H_0(P) = H^0(P) = \mathbb{Z}$, $H_1(P) = H^1(P) = 0$ y $H_n(P) = H^n(P) = 0$. Para ello, recuérdese que la inclusión $i : K \subseteq P$ es una equivalencia *shape* de modo que la hipótesis de que K sea conexo y $\check{H}^1(K) = 0$ implican que $H_0(P) = H^0(P) = \mathbb{Z}$ (porque P es conexo) y $H_1(P) = \check{H}_1(P) = \check{H}_1(K) = 0$. Por el teorema del coeficiente universal, $H^1(P) = \tau H_0(P) \oplus \beta H_1(P) = \tau \mathbb{Z} \oplus \beta 0 = 0$ (aquí τG y βG denotan la parte de torsión y la parte libre de G , respectivamente). Por último, como P es una n -variedad conexa con borde no vacío, $H_n(P) = H^n(P) = 0$.

Ahora considérese los siguientes trozos de la sucesión exacta larga en homología y cohomología para el par $(P, \partial P)$:

$$H_n(P) \longrightarrow H_n(P, \partial P) \longrightarrow H_{n-1}(\partial P) \longrightarrow H_{n-1}(P) \longrightarrow H_{n-1}(P, \partial P)$$

$$H^{n-1}(P, \partial P) \longrightarrow H^{n-1}(P) \longrightarrow H^{n-1}(\partial P) \longrightarrow H^n(P, \partial P) \longrightarrow H^n(P)$$

Por dualidad de Lefschetz es $H^k(P, \partial P) = H_{n-k}(P)$ y $H_k(P, \partial P) = H^{n-k}(P)$, lo que junto con los grupos de homología y cohomología de P calculados más arriba da

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}(\partial P) \longrightarrow H_{n-1}(P) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(P) \longrightarrow H^{n-1}(\partial P) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

El borde ∂P es una $(n-1)$ -variedad compacta (sin borde) con r componentes conexas, y por tanto $H_{n-1}(\partial P) = H^{n-1}(\partial P) = \mathbb{Z}^r$. Sólo queda, entonces, calcular $H^{n-1}(P)$ y $H_{n-1}(P)$, ya que estos coinciden con $\check{H}^{n-1}(P) = \check{H}^{n-1}(K)$ y $\check{H}_{n-1}(P) = \check{H}_{n-1}(K)$.

De la segunda sucesión exacta, que es escindida porque \mathbb{Z} es libre, se deduce enseguida que $\mathbb{Z}^r = H^{n-1}(\partial P) = H^{n-1}(P) \oplus \mathbb{Z}$ y en consecuencia $H^{n-1}(P) = \mathbb{Z}^{r-1}$. Para el aserto relativo a la homología, obsérvese que $0 = H^n(P) = \tau H_{n-1}(P) \oplus \beta H_n(P)$ implica que $H_{n-1}(P)$ es libre (porque no tiene torsión y es finitamente generado), luego de la primera sucesión exacta se sigue que $H_{n-1}(P) = \mathbb{Z}^{r-1}$. \square

Puede generalizarse la Proposición 6.10 asumiendo que M es orientable respecto a cierto anillo de coeficientes R , y la misma prueba sigue siendo válida para concluir que $\check{H}^{n-1}(K; R) = \check{H}_{n-1}(K; R) = \mathbb{R}^{r-1}$.

6.3. Condiciones suficientes para que $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$

Recuérdese el comentario hecho a continuación del Corolario 6.3 al efecto de la previsible necesidad de imponer alguna condición fuerte para poder obtener la relación $\text{Sh}(\partial P) \geq \text{Sh}(\partial K)$. El siguiente Teorema 6.11 muestra una posible elección, y el Corolario 6.12 ejemplifica una situación natural que satisface las hipótesis del teorema.

Teorema 6.11. *Sean K un atractor estable en M y $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ un entorno compacto y positivamente invariante de K . Supongamos que ∂K es un atractor estable en K y que su repulsor dual está contenido en alguna espina homotópica $L \subseteq \text{int}(K)$ de P . Entonces $\text{Sh}(\partial K) = \text{Sh}(\partial P)$.*

Demostración. Denotemos K^* al repulsor dual de ∂K en K .

Aserto. ∂K es un atractor en $\mathcal{A}(K) - K^*$.

Prueba. Como K es un atractor en $\mathcal{A}(K)$, existe una función de Lyapunov $\Phi_1 : \mathcal{A}(K) \rightarrow [0, +\infty)$ que es estrictamente decreciente en las trayectorias de $\mathcal{A}(K) - K$ y se anula precisamente en K . Análogamente, como ∂K es un atractor en K con región de atracción $K - K^*$, existe una función de Lyapunov $\Phi_2 : K - K^* \rightarrow [0, +\infty)$ con propiedades análogas a las de Φ_1 . Ahora, como $\Phi_1|_{\partial K} = 0 = \Phi_2|_{\partial K}$ y además la trayectoria de todo punto $p \in \mathcal{A}(K) - K^*$ que no pertenezca a ∂K está contenida en $\mathcal{A}(K) - K$ o en $\text{int}(K) - K^*$ (por ser conexa), se sigue que

$$\Phi := \Phi_1 \bigcup \Phi_2 : \mathcal{A}(K) - K^* \rightarrow [0, +\infty)$$

es una función de Lyapunov para ∂K . Por tanto este último es un atractor estable cuya región de atracción contiene, al menos, a $\mathcal{A}(K) - K^*$. Que de hecho coincide con $\mathcal{A}(K) - K^*$ se debe a que K^* es un compacto invariante disjunto con ∂K y por tanto no puede ser atraído por K . Esto prueba el Aserto.

Mantengamos la misma notación que en la demostración del Teorema 6.6, y denotemos además $j : \partial K \subseteq P - L$ la inclusión. Nótese que, por definición de las aplicaciones r e i , es

$$i \circ g = i \circ r \circ j \simeq_H j$$

vía una homotopía H cuya imagen está contenida en $P - L$. Como ∂K es un atractor en $\mathcal{A}(K) - K^*$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los entornos W_k considerados en la prueba del Teorema 6.6 son positivamente invariantes. Junto con el hecho de que $\text{im}(H)$ es un subconjunto compacto de $P - L \subseteq \mathcal{A}(K) - K^*$, esto implica que hay una sucesión decreciente creciente de tiempos no negativos $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\text{im}(H) \cdot [s_k, +\infty) \subseteq W_k$. Ahora, si ponemos $H_k : \partial K \times [0, 1] \rightarrow W_k$ la aplicación

continua $H_k(p, t) := H(p, t) \cdot s_k$, tenemos $H_k(p, 0) = H(p, 0) \cdot s_k = g(p) \cdot s_k$ y $H_k(p, 1) = H(p, 1) \cdot s_k = p \cdot s_k$ para cada $p \in \partial K$. Por ser cada W_k positivamente invariante se deriva de aquí que

$$H_k(p, 0) = g(p) \cdot s_k, \quad (f_k \circ g)(p) = g(p) \cdot t_k \text{ y } H_k(p, 1) = p \cdot s_k$$

son todas homotópicas entre sí y a $\text{id}_{\partial K}$ en W_n . Por lo tanto $f_k \circ g \simeq \text{id}_{\partial K}$ en W_k para cada $k \in \mathbb{N}$ y $f \circ g = \text{id}_{\partial K}$ en la categoría *shape*. Finalmente, en el Teorema 6.6 se probó que $g \circ f = \text{id}_{\partial K}$ y esto implica que f es una equivalencia *shape* entre ∂P y ∂K . \square

Naturalmente, un resultado análogo al Teorema 6.11 se obtiene si ∂K es un repulsor en K cuyo atractor dual K^* está contenido en una espina homotópica $L \subseteq \text{int}(K)$ de P . Obsérvese además que el Corolario 6.3, junto con el Teorema 6.11, dan condiciones suficientes para que el borde de un atractor tenga el *shape* de un poliedro finito.

Presentamos finalmente una situación, motivada por el trabajo del capítulo anterior, en que se dan las hipótesis del Teorema 6.11.

Corolario 6.12. *Sea M una n -variedad diferenciable y orientada, y supongamos que $K \subseteq M$ es un atractor estable tal que ∂K es una hipersuperficie orientable que es un compacto invariante aislado y tal que $C\check{H}^{n-1}(\partial K) = 0$. Entonces ∂K y ∂P tienen el mismo tipo de homotopía cualquiera que sea el entorno $P \subseteq \mathcal{A}(K)$ de K compacto y positivamente invariante.*

Demostración. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{A}(K) - K$ cualquier sección de $\mathcal{A}(K) - K$. Como retracts de $\mathcal{A}(K) - K$, que es un ANR, también Σ es un ANR. Además, como es compacto, debe tener una cantidad finita de componentes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. La igualdad $\partial K = \omega(\Sigma)$, que se sigue de [63, Theorem 2.1.], implica entonces que $\partial K = \omega(\Sigma_1) \cup \dots \cup \omega(\Sigma_k)$ tiene a lo más k componentes, porque cada $\omega(\Sigma_j)$ es conexo (esto es análogo a la demostración de la Proposición 5.3). Podemos entonces suponer que ∂K es conexo sin pérdida de generalidad (si no, se aplica el argumento que sigue a cada una de sus componentes).

Sea $N \subseteq \mathcal{A}(K)$ un bloque aislante de ∂K , que por la hipótesis de diferenciabilidad podemos suponer ([20]) que es una n -variedad orientable con borde $\partial N = N^e \cup N^s$ unión de las dos $(n-1)$ -subvariedades N^e y N^s . Además asumiremos sin pérdida de generalidad que N es conexo, porque hemos supuesto que ∂K lo es. Por dualidad de Lefschetz es $H_1(N, N^e) = H^{n-1}(N, N^s) = C\check{H}^{n-1}(K) = 0$, y de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(N, N^e) \longrightarrow \check{H}^0(N) \longrightarrow \check{H}^0(N^e) \longrightarrow \check{H}^1(N, N^e) = 0 \longrightarrow \dots$$

en cohomología reducida y la hipótesis de que N es conexo se sigue que N^e es conexo a su vez. Ahora, como K es un atractor en $\mathcal{A}(K)$ necesariamente $(\mathcal{A}(K) - K) \cap N^e \neq \emptyset$, luego de hecho $N^e \subseteq \mathcal{A}(K) - K$. Como $\partial N = N^e \cup N^s$, esto implica que cualquier $p \in \partial N \cap \text{int}(K)$ pertenece a N^s , luego ∂K es un repulsor uniforme en K . Denotemos K^* su atractor dual. Un argumento análogo al del Corolario 6.8 permite deducir que existe una espina homotópica $L \subseteq \text{int}(K)$ para P que contiene a K^* , de modo que se aplica el Teorema 6.11 para concluir que $\text{Sh}(\partial P) = \text{Sh}(\partial K)$. Por último, como ∂K y ∂P son ANR's (el primero porque es una variedad, el segundo por el Corolario 6.3), de hecho sus tipos de homotopía coinciden. \square

Apéndice A

Entornos aislantes propios y bloques aislantes

Introducción. Si bien un compacto invariante aislado para un flujo se introduce como aquel que posee un entorno aislante, esta última noción no es en general apta para un estudio geométrico, esencialmente porque las diversas aplicaciones que surgen de modo natural (por ejemplo, proyecciones sobre los conjuntos de entrada o salida, véase la Definición A.3) no tienen por qué ser continuas. Esto se remedia, seleccionando de entre los entornos aislantes, aquellos que poseen buenas propiedades: son los *entornos aislantes propios*. El objetivo de este Apéndice es recoger las definiciones relevantes (que no siempre son estándar en la literatura matemática) y probar algunos resultados que en el texto se emplean libremente.

Definición A.1. Sea N un entorno aislante. Para $p \in N$ ponemos

$$t^e(p) := \inf \{t \leq 0 : p \cdot [t, 0] \subseteq N\} \in [-\infty, 0]$$

y

$$t^s(p) := \sup \{t \geq 0 : p \cdot [0, t] \subseteq N\} \in [0, +\infty],$$

que llamaremos *tiempos de entrada y salida* de p , respectivamente.

Intuitivamente, $t^e(p)$ y $t^s(p)$ son los tiempos (con signo) que necesita p para salir de N en el pasado o en el futuro. Es claro de la definición que $t^e(p) = -\infty \Leftrightarrow p \in N^-$, $t^s(p) = +\infty \Leftrightarrow p \in N^+$ y $p \cdot (t^e(p), t^s(p)) \subseteq N$, expresión en la que puede cerrarse el extremo izquierdo, derecho, o ambos, del intervalo $(t^e(p), t^s(p))$ si es finito el valor de $t^e(p)$, $t^s(p)$, o ambos.

Es asimismo inmediato comprobar que si N es un entorno aislante, $p \in N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $p \cdot [\alpha, \beta] \subseteq N$, entonces

$$t^e(p \cdot \alpha) = t^e(p \cdot \beta) + \beta - \alpha$$

y también

$$t^s(p \cdot \alpha) = t^s(p \cdot \beta) + \beta - \alpha,$$

donde se ha adoptado el convenio de que $+\infty \pm \alpha = +\infty$ y $-\infty \pm \alpha = -\infty$ cualquiera que sea el número real α . Obsérvese que la hipótesis sobre α y β se da, en particular, si $t^e(p) \leq \alpha \leq \beta \leq t^s(p)$.

Definición A.2. Sea N un entorno aislante. Se definen los *conjuntos de entrada y salida* como

$$N^e := \{p \in N : t^e(p) = 0\}$$

y

$$N^s := \{p \in N : t^s(p) = 0\}$$

respectivamente.

De la Definición A.1 se observa enseguida que

$$p \in N^e \Leftrightarrow p \cdot (-\varepsilon, 0) \cap (M - N) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$$

y análogamente

$$p \in N^s \Leftrightarrow p \cdot (0, \varepsilon) \cap (M - N) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En particular, si $p \in \text{int}(N)$ entonces por la continuidad del flujo existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \text{int}(N)$ y en consecuencia $p \notin N^e$ y $p \notin N^s$. Expresado de otro modo, tanto N^e como N^s son subconjuntos de ∂N .

Definición A.3. Sea N un entorno aislante. Se definen las funciones *proyección sobre el conjunto de entrada y proyección sobre el conjunto de salida* como

$$\pi^e : N - N^- \longrightarrow N^e \text{ dada por } \pi^e(p) := p \cdot t^e(p)$$

y

$$\pi^s : N - N^+ \longrightarrow N^s \text{ dada por } \pi^s(p) := p \cdot t^s(p).$$

Así, $\pi^e(p)$ es el punto por el que la trayectoria de p entra en N , mientras que $\pi^s(p)$ es el punto por el cual la trayectoria de p sale de N . En esta situación diremos que $\pi^e(p)$ y $\pi^s(p)$ son duales uno del otro y, más generalmente, si $P \subseteq N^e - n^+$ ó $P \subseteq N^s - n^-$, definimos su *dual* P' como $\pi^s(P)$ ó $\pi^e(P)$, respectivamente. Intuitivamente parece razonable considerar n^+ y n^- duales uno del otro, y esto sugiere extender la definición que acabamos de dar a conjuntos $n^+ \subseteq P \subseteq N^e$ ó $n^- \subseteq P \subseteq N^s$ haciendo $P' := N^s - \pi^s(N^e - P)$ ó $P' := N^e - \pi^e(N^s - P)$, respectivamente. Es claro que en cualquier caso $P'' = P$.

A.1. Entornos aislantes propios

Tanto las funciones t^e y t^s como las proyecciones π^e y π^s no tienen por qué tener ninguna buena propiedad en lo que se refiere a continuidad (aunque sí es claro que la continuidad de las primeras implica la continuidad de las segundas). Por otro lado, puesto que $N^e = (t^e)^{-1}(0)$ y $N^s = (t^s)^{-1}(0)$, una condición necesaria para la continuidad de t^e y t^s es que tanto N^e como N^s sean cerrados. Esto motiva la siguiente definición:

Definición A.4. Un entorno aislante N se dice que es *propio* si N^e y N^s son cerrados en N .

La importancia de la Definición A.4 queda de manifiesto por el siguiente resultado:

Teorema A.5. Si N es un entorno aislante, son equivalentes:

1. N es entorno aislante propio,
2. las funciones tiempo de entrada y salida t^e y t^s son continuas,
3. las proyecciones π^e y π^s son continuas.

Además si se da alguna de las condiciones (1), (2) ó (3), las proyecciones π^e y π^s son abiertas.

Demostración. Que (1) \Rightarrow (2) es estándar, y que (2) \Rightarrow (3) es inmediato por definición. La implicación (3) \Rightarrow (1) se sigue del hecho de que N^e es el conjunto de puntos fijos de π^e , mientras que N^s es el conjunto de puntos fijos de π^s .

Supongamos ahora que t^e y t^s son continuas, y probemos que π^e y π^s son abiertas. Haremos el argumento sólo para la primera, porque la otra se trata de modo análogo. Sea $U \subseteq N - N^-$ un conjunto abierto, se trata de ver que $\pi^e(U)$ es abierto en N^e . Tomemos $p \in \pi^e(U)$ y $q \in U$ tal que $\pi^e(q) = p$, es decir $q \cdot t^e(q) = p$. Poniendo $0 \leq t := -t^e(q) < +\infty$ se tiene $p \cdot t = q \in U$, y además $t \leq t^s(p)$.

La aplicación $F : N^e \rightarrow N$ dada por $F(q) := q \cdot \min\{t, t^s(q)\}$ toma valores en N , es continua, y además $F(p) = p \cdot t = q \in U$. Por tanto $V := F^{-1}(U)$ es un entorno abierto de p en N^e , y si $q \in V$ entonces $F(q) \in U$ y $\pi^e \circ F(q) = q$, de donde $V \subseteq \pi^e(U)$. Esto prueba que $\pi^e(U)$ es abierto. \square

El siguiente teorema recoge las consecuencias geométricas que se derivan de la hipótesis de que un entorno aislante sea propio.

Teorema A.6. *Sean N un entorno aislante propio y $p \in N$. Entonces se da una de las siguientes alternativas mutuamente excluyentes:*

1. o bien $p \cdot [t^e(p), t^s(p)] \subseteq \partial N$,
2. o bien $p \cdot (t^e(p), t^s(p)) \subseteq \text{int}(N)$.

Demostración. Necesitamos dos asertos preliminares.

Aserto 1. Supongamos que $p \in \partial N$ verifica que $p \cdot [-\varepsilon, 0] \cap \text{int}(N) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $p \in N^s$.

Prueba. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [-\frac{1}{n}, 0]$ tal que $p \cdot t_n \in \text{int}(N)$. Por la continuidad del flujo y ser $\text{int}_M(N)$ abierto en M , para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{E}_M(p)$ tal que $U_n \cdot t_n \subseteq \text{int}(N)$, y como $p \in \partial N$ se tiene que $U_n \cap (M - N) \neq \emptyset$. De este modo podemos elegir puntos $p_n \in U_n \cap (M - N)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obteniendo así una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M - N$ tal que $p_n \cdot t_n \in \text{int}(N)$ pero $p_n \notin N$, de donde $0 \leq t^s(p_n \cdot t_n) \leq -t_n$. En particular, como $t_n \rightarrow 0$ por construcción, es $t^s(p_n \cdot t_n) \rightarrow 0$. Por otro lado, t^s es continua porque N^s es cerrado, luego como $p_n \cdot t_n \rightarrow p$ se deduce que $t^s(p) = 0$ y en consecuencia $p \in N^s$, como queríamos.

Aserto 2. Supongamos que $p \in \partial N$ verifica que $t^e(p) < 0$ y $t^s(p) > 0$. Entonces $p \cdot [t^e(p), t^s(p)] \subseteq \partial N$.

Prueba. Denotemos $A := \{t \in (t^e(p), t^s(p)) : p \cdot t \in \partial N\}$. Por hipótesis $0 \in A$, de modo que $A \neq \emptyset$. Además es claro que A es cerrado en $(t^e(p), t^s(p))$, porque ∂N es cerrado en N . Veamos que también es abierto. Si $t \in A$, es $t^s(p \cdot t) = t^s(p) - t > 0$, de donde $p \cdot t \notin N^s$ y el Aserto 1. implica que $(p \cdot t) \cdot [-\varepsilon, 0] \cap \text{int}(N) = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$. Podemos suponer que $\varepsilon < -t^e(p \cdot t)$, pues este último es también positivo, de

modo que $(p \cdot t) \cdot [-\varepsilon, 0] \subseteq N$. En consecuencia $(p \cdot t) \cdot [-\varepsilon, 0] \subseteq N - \text{int}(N) = \partial N$, o también $p \cdot [t - \varepsilon, t] \subseteq \partial N$. Un argumento análogo intercambiando los papeles de N^e y N^s (también en el Aserto 1.) prueba que existe $\delta > 0$ tal que $p \cdot [t, t + \delta] \subseteq \partial N$. En definitiva, $[t - \varepsilon, t + \delta] \subseteq A$, y esto demuestra que A es abierto en $(-t^e(p), t^s(p))$. En definitiva, $A = (-t^e(p), t^s(p))$, lo que demuestra el aserto.

Estamos ya en condiciones de completar la prueba del teorema. Dado $p \in N$, si $p \cdot (t^e(p), t^s(p)) \not\subseteq \text{int}(N)$, existe $t \in N(t^e(p), t^s(p))$ tal que $p \cdot t \in \partial N$. Ahora, como $t^e(p \cdot t) = t^e(p) - t < 0$ y $t^s(p \cdot t) = t^s(p) - t > 0$, por el Aserto 2. se concluye que $\partial N \supseteq (p \cdot t) \cdot [t^e(p), t^s(p)] = p \cdot [t^e(p), t^s(p)]$. \square

Si, en la situación expresada en (1) del Teorema A.6 es $t^e(p) < 0$ o $t^s(p) > 0$, diremos que $p \cdot [t^e(p), t^s(p)]$ es un *segmento propio de trayectoria* que está contenido en ∂N . La no existencia de este tipo de segmentos es obviamente equivalente a que $\partial N = N^e \cup N^s$.

Conviene observar también que si $p \in \text{int}(N^e)$ ó $p \in \text{int}(N^s)$ (los interiores de N^e ó N^s en ∂N , respectivamente), entonces necesariamente está en la alternativa (2) del Teorema: si, por ejemplo, $p \in \text{int}(N^e)$ estuviese en la situación (1), $p \cdot [t^e(p), t^s(p)] = p \cdot [0, t^s(p)] \subseteq \partial N$ y como $t^s(p) > 0$ y $p \in \text{int}(N^e)$, necesariamente existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot [0, \varepsilon] \subseteq N^e$, lo que implica $0 = t^e(p \cdot \varepsilon) \leq -\varepsilon$, contradicción.

Si el Teorema A.6 se refiere a cómo inciden los segmentos de trayectoria de puntos de N en ∂N , el siguiente resultado lo complementa analizando cómo inciden los segmentos de trayectoria de $M - N$ en ∂N :

Proposición A.7. *Si N es un entorno aislante propio y $p \in N^e - N^s$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N$. Análogamente, si $p \in N^s - N^e$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq M - N$.*

Demostración. Puesto que $p \notin N^s$, se tiene que $t^s(p) > 0$ y por la continuidad de t^s existen $U \in \mathcal{E}_N(p)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $t^s|_U \geq \varepsilon > 0$. Puede además reducirse ε lo suficiente como para que $p \cdot [-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq U$. Afirmamos que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N$. En efecto, en caso contrario existe $t \in (-\varepsilon, 0)$ tal que $p \cdot t \in N$, y como $p \cdot t \in U$ por construcción, es $t^s(p \cdot t) \geq \varepsilon$. Pero entonces $N \supseteq (p \cdot t) \cdot [0, \varepsilon] = p \cdot [t, t + \varepsilon]$. Ahora, como $t \in (-\varepsilon, 0)$ se sigue que $t + \varepsilon > 0$, de donde $[t, 0] \subseteq [t, t + \varepsilon]$ y por tanto $p \cdot [t, 0] \subseteq p \cdot [t, t + \varepsilon] \subseteq N$. Así $t^e(p) \leq t < 0$, lo que contradice que $p \in N^e$. \square

En relación a la dualidad, también en los entornos aislantes propios se tienen buenas propiedades:

Proposición A.8. *Si P es un subconjunto compacto de N^e que contiene a n^+ , entonces P' es un subconjunto compacto de N^s que contiene a n^- . Si, además, P es entorno de n^+ en ∂N^e , entonces P' es entorno de n^- en ∂N^s .*

Demostración. Que P' contiene a n^- se ve enseguida examinando su definición. Para probar que es compacto basta observar que su complemento $N^s - P' = \pi^s(N^e - P)$ es abierto, por ser la imagen del abierto $N^e - P$ mediante la aplicación abierta π^s . Para terminar, supongamos que $n^+ \subseteq \text{int}_{N^e}(P)$. Entonces existe $U \subseteq P$ abierto en N^e tal que $n^+ \subseteq U$, y poniendo $Q := N^e - U$ se obtiene un compacto disjunto con n^+ cuyo dual Q' también es un compacto disjunto con n^- , porque $' : N^e - n^+ \rightarrow N^s - n^-$ es un homeomorfismo. Así $V := N^s - Q'$ es un abierto en N^s que contiene a n^- y además está contenido en P' , de donde P' es entorno de n^- en N^s . \square

A.2. Bloques aislantes

En [20] se prueba el siguiente

Teorema. Si K es un compacto invariante aislado para un flujo diferenciable en una n -variedad diferenciable, posee una base de bloques aislantes N tales que: N es una n -variedad diferenciable, N^e y N^s son $(n-1)$ -variedades diferenciables con borde común $N^e \cap N^s$; y además la curva integral por p entra transversalmente en N si $p \in \text{int}(N^e)$, sale transversalmente de N si $p \in \text{int}(N^s)$, y es tangente exterior a ∂N si $p \in N^e \cap N^s$.

Este resultado sugiere poner las siguientes definiciones, que son análogos topológicos a las nociones de entrada o salida transversal (y aunque aún utilicemos esos términos, no se pretende implicar ninguna diferenciabilidad):

Definición A.9. Sean N un entorno aislante y $p \in \partial N$. Se dice que N es un punto de

1. *entrada transversal* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N$ y $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq \text{int}(N)$,
2. *salida transversal* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq \text{int}(N)$ y $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq M - N$,
3. *tangencia exterior* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N$ y $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq M - N$.

Definición A.10. Un entorno aislante propio N se dice que es un *bloque aislante* si N^e y N^s tienen frontera topológica común $N^e \cap N^s$ y además todo punto $p \in N^e - N^s$ es de entrada transversal, todo punto $p \in N^s - N^e$ es de salida transversal y todo punto $p \in N^e \cap N^s$ es de tangencia exterior.

Y se tiene el siguiente teorema A.11.

Teorema A.11. *Todo compacto invariante aislado K en un espacio métrico localmente compacto M posee una base de bloques aislantes.*

Demostración. Utilizaremos el siguiente resultado, que puede encontrarse en [17].

Teorema. Sea K un compacto invariante aislado en un espacio métrico localmente compacto. Entonces K posee entornos aislantes N arbitrariamente pequeños tales que para cada uno de ellos existe una función continua $L : N \rightarrow [0, +\infty]$ que satisface las siguientes propiedades: (i.) $K = L^{-1}(+\infty)$, (ii.) $\partial N = L^{-1}(0)$ y finalmente (iii.) $L = \min \{L^+, L^-\}$, donde $L^+, L^- : N \rightarrow [0, +\infty]$ son funciones continuas y L^+ (resp. L^-) es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en segmentos de trayectorias de puntos $p \in N - K$ a no ser que $\alpha(p) \subseteq K$ (resp. $\omega(p) \subseteq K$), en cuyo caso $L^+(p) = +\infty$ (resp. $L^-(p) = +\infty$).

Sean N un entorno aislante de K y $L^+, L^- : N \rightarrow [0, +\infty]$ como los descritos en el párrafo anterior, y pongamos $N^* = \{p \in N : L(p) \geq 1\}$. Afirmamos que N^* es un bloque aislante de K en el sentido de la Definición A.10.

En primer lugar, debido a la continuidad de L y la condición (i.), es claro que N^* es un entorno aislante de K . Además, por (ii.) se tiene que $N^* \subseteq \text{int}(N)$.

Sea $p \in \partial N^*$ y supongamos primero que $L^+(p) > L^-(p)$. Por la continuidad de L^+ y L^- existe un entorno U de p contenido en $N - K$ y tal que $L^+|_U > L^-|_U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$. Entonces, si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se tiene

$$L(p \cdot t) = \min \{L^+(p \cdot t), L^-(p \cdot t)\} = L^-(p \cdot t).$$

Como esta función es estrictamente decreciente con t creciente (obsérvese que $L^-(p) < L^+(p) \leq +\infty$) y vale 1 exactamente en $t = 0$, se concluye que $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq N^*$ y $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq M - N^*$, de modo que p es un punto de salida transversal. Análogamente se ve que si $L^+(p) < L^-(p)$, entonces p es un punto de entrada transversal. Finalmente, si $L^+(p) = L^-(p)$ se tiene que p es un punto de tangencia exterior. En efecto, eligiendo $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq N - K$, se tiene para $0 < t < \varepsilon$

$$L^+(p \cdot t) > L^+(p) = L^-(p) > L^-(p \cdot t),$$

de donde $L(p \cdot t) = L^-(p \cdot t) < L^-(p) = 1$ y $p \cdot (-\varepsilon, 0) \subseteq M - N^*$. De modo similar se comprueba que $p \cdot (0, \varepsilon) \subseteq M - N^*$ también.

Queda comprobado entonces que todo punto de ∂N^* es de entrada transversal, de salida transversal o de tangencia. Además, de lo ya visto se sigue inmediatamente que $N^s = \{p \in \partial N^* : L^+(p) \leq L^-(p)\}$ y $N^e = \{p \in \partial N^* : L^+(p) \geq L^-(p)\}$. Como estos conjuntos son cerrados, N^* es un bloque aislante de K . \square

Apéndice B

Entornos regulares de compactos contenidos en superficies

Introducción. Nuestro objetivo en este Apéndice es estudiar algunas cuestiones relacionadas con el *shape* de compactos contenidos en superficies, así como de bases especiales de entornos de los mismos. El propio Borsuk estableció en su monografía [12] al análogo al Corolario B.9 para continuos del plano, y generalizaciones a continuos en superficies arbitrarias pueden obtenerse encadenando algunos resultados contenidos en [11], [23], [48] y [49].

Definición B.1. Sea K un compacto contenido en el interior de una 2-variedad M . Un entorno P de K en M se dice que es *regular* si es una 2-variedad compacta (posiblemente con borde) y la inclusión $i : K \longrightarrow P$ es una equivalencia *shape*. K se llama *espin*a de P .

Comenzamos con un teorema de existencia de entornos regulares:

Teorema B.2. *Sea K un compacto contenido en el interior¹ de una 2-variedad M y tal que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado para $k = 0$ y $k = 1$. Entonces K posee una base decreciente de entornos regulares en M , y en particular tiene el *shape* de un poliedro finito.*

La prueba se seguirá de los Lemas B.3 y B.5. El primero de ellos es una versión cohomológica del Teorema B.2, mientras que el segundo permite pasar de esa versión cohomológica al resultado homotópico que se presenta en el Teorema.

Lema B.3. *Con la notación e hipótesis del Teorema B.2, K posee una base decreciente de entornos $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que son 2-variedades compactas y tales que cada inclusión $i_n : K \longrightarrow P_n$ induce isomorfismos $i_n^* : \check{H}(P_n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \check{H}(K; \mathbb{Z}_2)$.*

Antes de proceder con la demostración del Lema B.3, será conveniente dar un esquema de la misma. Puesto que todo el trabajo se desarrolla en superficies, asumiremos sin pérdida de generalidad que éstas son poliedros (esto es el teorema de Radó [60], que puede consultarse también en [53, Theorem 3., p. 60]), así como cualquier cadena que represente a una clase de homología (esto es conveniente pero no estrictamente necesario, como podrá ir comprobando el lector). Además, para abreviar, la letra P

¹Esta hipótesis de que K esté contenido en el interior de la variedad puede eliminarse, véase la Observación B.6.

(quizás con subíndices) siempre se reservará para entornos de K que sean 2-variedades compactas con borde, y esto no se escribirá de forma explícita.

En lo sucesivo emplearemos repetidamente la siguiente versión del teorema de dualidad de Alexander para variedades con borde: *sea K un compacto en el interior de una n -variedad compacta con borde M ; entonces*

$$H_{n-k}(M - K, \partial M; \mathbb{Z}_2) \cong \check{H}^k(M, K; \mathbb{Z}_2).$$

Para verlo, sea M^* la misma variedad M de la que se ha eliminado un collar interior de ∂M , lo suficientemente pequeño para que $K \subseteq M^*$. Aplicando el teorema clásico de dualidad de Alexander al par compacto (M^*, K) en $\text{int}(M)$, se tiene que

$$H_{n-k}(\text{int}(M) - K, \text{int}(M) - M^*; \mathbb{Z}_2) \cong \check{H}^k(M^*, K; \mathbb{Z}_2).$$

Puesto que los pares $(\text{int}(M) - K, \text{int}(M) - M^*)$ y $(M - K, \partial M)$ tienen el mismo de homotopía, así como también (M^*, K) y (M, K) , se obtiene la fórmula del enunciado.

Es claro que para probar el Lema B.3 es suficiente demostrar que existe un P tal que $i^* : \check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \check{H}^k(P; \mathbb{Z}_2)$ es isomorfismo; la existencia de la base de entornos $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se sigue entonces de manera inmediata. Por otro lado, que i^* sea isomorfismo es equivalente a que $\check{H}^k(P, K; \mathbb{Z}_2) = 0$ para todo k y esto último, por el teorema de dualidad de Alexander para K en la 2-variedad compacta con borde P , es a su vez equivalente a que $H_k(P - K, \partial P; \mathbb{Z}_2) = 0$ para $0 \leq k \leq 2$. Conviene observar aquí que de la hipótesis de que $\check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ sea finitamente generado para $k = 0$ y $k = 1$ se sigue que $\check{H}^k(P, K; \mathbb{Z}_2) = H_{2-k}(P - K, \partial P; \mathbb{Z}_2)$ también lo es para $0 \leq k \leq 2$, porque $\check{H}^k(P; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado al ser P una variedad compacta.

La idea básica de la demostración del Lema B.3 consiste en partir de un P arbitrario e ir “recortando” de éste las posibles clases no triviales de homología de $H_k(P - K, \partial P; \mathbb{Z}_2)$. A continuación describimos de manera genérica este proceso de recorte y más adelante lo aplicamos a nuestro caso concreto. Todos los grupos de coeficientes son \mathbb{Z}_2 y no se incluyen explícitamente en la notación.

Recortando un poliedro X de P . Sea $X \subseteq P - K$ un poliedro compacto, y tomemos E entorno regular de X en $P - K$ tal que $E \cap \partial P$ sea a su vez entorno regular de $X \cap \partial P$ en ∂P (véase [38]).

Pongamos $P_X = P - \text{int}_P(E)$. Este nuevo P_X es también una 2-variedad compacta con borde $\partial P_X = \partial P - (\partial P \cap \text{int}_P(E))$, y sigue siendo entorno de K en M .

Calculemos ahora $H_k(P_X - K, \partial P_X)$. Para ello considérese la sucesión exacta de homología correspondiente al triple $\partial P \subseteq \partial P \cup E \subseteq P - K$, que es

$$\dots \longrightarrow H_k(\partial P \bigcup E, \partial P) \longrightarrow H_k(P - K, \partial P) \longrightarrow H_k(P - K, \partial P \bigcup E) \longrightarrow \dots$$

La inclusión $(E, E \cap \partial P) \subseteq (\partial P \bigcup E, \partial P)$ induce isomorfismos en homología, luego el primer grupo de la sucesión de arriba puede sustituirse por $H_k(E, E \cap \partial P)$, que a su vez es isomorfo a $H_k(X, X \cap \partial P)$ (el isomorfismo también está inducido por la inclusión). Por otro lado, si E^* es el resultado de eliminar de la variedad E un pequeño collar interior de $\partial_P(E)$, haciendo escisión del mismo en el par $(P - K, \partial P \bigcup E)$ se tiene que

$$H_k(P - K, \partial P \bigcup E) = H_k(P - K - E^*, \partial P \bigcup E - E^*) = H_k(P_X - K, \partial P_X),$$

donde la última igualdad se debe a que $(P - K - E^*, \partial P \cup E - E^*)$ retracts por deformación sobre $(P_X - K, \partial P_X)$. En definitiva, se tiene que existe una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_k(X, X \cap \partial P) \xrightarrow{j_*} H_k(P - K, \partial P) \xrightarrow{f} H_k(P_X - K, \partial P_X) \longrightarrow \dots$$

donde j_* está inducido por inclusión.

Demostración. (del Lema B.3) Introduzcamos la notación siguiente: si c es una cadena simplicial expresada en la forma $c = \sum_j \sigma_j$ como suma de simples, denotaremos $|c| = \bigcup_j \text{im}(\sigma_j)$ un soporte de c . Para una clase de homología $z = [c]$ introducimos la misma notación $|z| = |c|$, aunque ahora $|z|$ no está unívocamente definido, pues depende de la representación c elegida del mismo. El conjunto $|z|$ siempre es un poliedro compacto.

(1) *Existe P tal que $H_0(P - K, \partial P) = 0$.* Comencemos con un P arbitrario, y sea $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_n\}$ un sistema generador de $H_0(P - K, \partial P)$, que como se argumentó más arriba es finitamente generado. Cada z_i es de la forma $z_i = \left[\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \right]$, donde los p_{ij} son puntos de $P - K$ (se puede suponer si se desea que ninguno está en ∂P), y consideramos

$$X = \bigcup_{i=1}^n |z_i|,$$

que es un poliedro compacto contenido en $P - K$. Si recortamos X de P obtenemos un nuevo $P_X \subseteq P$ tal que existe una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_0(X, X \cap \partial P) \xrightarrow{j_*} H_0(P - K, \partial P) \xrightarrow{f} H_0(P_X - K, \partial P_X) \longrightarrow 0,$$

que se ha obtenido particularizando en $k = 0$ la expresión general dada más arriba. Obsérvese que f es suprayectiva, y por tanto $H_0(P_X - K, \partial P_X)$ está generado por $f(\mathcal{S}) = \{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$. Ahora, como para cada generador

$$z_i = \left[\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \right]$$

se tiene que los puntos p_{ij} están contenidos en X , la 0-cadena

$$c_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$$

es de hecho una 0-cadena en X , y claramente un ciclo relativo en $(X, X \cap \partial P)$. Por tanto $z_i \in \text{im}(j_*) = \ker(f)$, luego $f(z_i) = 0$ y en consecuencia $H_0(P_X - K, \partial P_X) = 0$ como queríamos.

(2) *Existe P tal que $H_k(P - K, \partial P) = 0$ para $k = 0, 1$.* Comencemos con un P como el obtenido en el paso anterior, y sea $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_n\}$ un sistema generador de $H_1(P - K, \partial P)$, que como se argumentó más arriba es finitamente generado. Ahora cada $z_i = \left[\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij} \right]$, donde los σ_{ij} son 1-simples de $P - K$. Consideremos

$$Y = \bigcup_{i=1}^n |z_i|,$$

que es un poliedro compacto contenido en $P - K$. Por razones que quedarán de manifiesto enseguida, no es suficiente recortar Y como hicimos en (1), sino que antes debemos exigir que conseguir que cumpla la propiedad adicional de que toda componente suya interseque a ∂P . Nótese en primer lugar que como $H_0(P - K, \partial P) = 0$, cada componente de $P - K$ corta a ∂P y por tanto toda componente Y_k de Y puede unirse por un camino lineal a pedazos γ_k en $P - K$ a algún punto de ∂P . Ahora eligiendo X como la unión de $\bigcup_k |\gamma_k|$ e Y , se obtiene un poliedro contenido en $P - K$, que contiene a todos los $|z_i|$ y tal que cada componente suya interseca a ∂P .

Recortemos ahora X de P para obtener P_X . Teniendo en cuenta que $H_0(X, X \cap \partial P) = 0$ porque cada componente de X corta a ∂P por construcción, se tiene que existe una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_1(X, X \cap \partial P) \xrightarrow{j_*} H_1(P - K, \partial P) \xrightarrow{f} H_1(P_X - K, \partial P_X) \longrightarrow 0$$

donde j_* está inducido por inclusión. Ahora se procede exactamente igual que en el paso (1) para concluir que $H_1(P_X - K, \partial P_X) = 0$, aunque quizás convenga señalar lo siguiente: para probar que $z_i \in \text{im}(j_*)$ se hace necesario observar que

$$c_i = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}$$

es un 1-ciclo relativo en $(X, X \cap P)$, y esto se sigue de que cada $|\sigma_{ij}| \subseteq X$ y además ∂c_i es una cadena en ∂P , porque $z_i = [c_i]$ es una clase de homología relativa a ∂P .

Finalmente, examinando qué sucede para la dimensión $k = 0$ se comprueba enseguida que $H_0(P_X - K, \partial P_X) = H_0(P - K, \partial P) = 0$ todavía.

Estamos ya en condiciones de completar la prueba del lema. Sea P como el del paso (2), que ya cumple $\check{H}^{2-k}(P, K) = H_k(P - K, \partial P) = 0$ para $k = 0, 1$. Pongamos $P = P_1 \cup P_2$, donde P_1 es la unión de las componentes de P que cortan a K y P_2 es la unión de las componentes de P que no lo hacen. Entonces de la sucesión de Mayer-Vietoris de $(P, K) = (P_1, K) \cup (P_2, \emptyset)$ se sigue que $\check{H}^*(P, K) = \check{H}^*(P_1, K) \oplus \check{H}^*(P_2)$. Por tanto

$$0 = H_k(P - K, \partial P) = \check{H}^{2-k}(P, K) = \check{H}^{2-k}(P_1, K) \oplus \check{H}^{2-k}(P_2)$$

para $k = 0, 1$, y así $\check{H}^{2-k}(P_1, K) = 0$ también para $k = 0, 1$. Además para $k = 2$ trivialmente $\check{H}^0(P_1, K) = 0$, porque toda componente de P_1 corta a K por definición. Esto concluye la prueba: P_1 satisface $\check{H}^k(P_1, K) = 0$ para $0 \leq k \leq 2$, es decir (como se argumentó más arriba) que la inclusión $i : K \longrightarrow P_1$ induce isomorfismos $i^* : \check{H}^k(P_1) \longrightarrow \check{H}^k(K)$ para todo k . \square

Observación B.4. *El último párrafo en la demostración del Lema B.3 puede interpretarse también en términos similares a los anteriores. En concreto, basta partir de un P que cumpla las condiciones de (2), definir X como la unión de las componentes de P que no intersecan a K y recortar X de P .*

El siguiente Lema B.5 se refiere a una situación más general que la que aquí nos ocupa, y permitirá pasar del resultado cohomológico del Lema B.3 a la versión homotópica, más fuerte, que se enuncia en el Teorema B.2. Nuevamente, en la prueba se sobreentienden los coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

Lema B.5. Sean $P_2 \subseteq \text{int}(P_1)$ dos 2-variedades compactas, posiblemente con borde, tales que la inclusión $i : P_2 \longrightarrow P_1$ induce isomorfismos en cohomología con coeficientes \mathbb{Z}_2 . Entonces

$$P_1 \cong P_2 \bigcup \partial P_2 \times [0, 1],$$

donde $\partial P_2 \times \{0\}$ se identifica con ∂P_2 y $\partial P_2 \times \{1\}$ se identifica con ∂P_1 .

Demostración. Bastará probar que $A = P_1 - \text{int}(P_2)$ es una unión disjunta de anillos, cada uno de los cuales tiene una componente del borde en ∂P_1 y otra en ∂P_2 .

Es claro que A es una 2-variedad compacta con borde $\partial A = \partial P_1 \bigcup \partial P_2$. Sea $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ la descomposición de A en sus componentes conexas. Afirmamos que cada ∂A_i posee al menos dos componentes, una en ∂P_1 y otra en ∂P_2 . Para verlo, utilícese la dualidad de Alexander para P_2 en la variedad con borde P_1 , obteniendo

$$H_k(P_1 - P_2, \partial P_1) = H^{2-k}(P_1, P_2) = 0$$

donde el último grupo es cero porque la inclusión $i : P_2 \longrightarrow P_1$ induce isomorfismos en cohomología. Así, y como A tiene el mismo tipo de homotopía que $P_1 - P_2$, se concluye que $H_0(A, \partial P_1) = 0$ y por dualidad de Lefschetz también $H_0(A, \partial P_2) = H_2(A, \partial P_1) = 0$. Esto implica que toda componente conexa de A debe cortar tanto a ∂P_1 como a ∂P_2 .

Veamos ahora que cada A_i es un anillo. De la sucesión exacta larga del par $(A_i, \partial A_i)$ en homología reducida

$$\dots \longrightarrow H_1(A_i, \partial A_i) \longrightarrow \tilde{H}_0(\partial A_i) \longrightarrow \tilde{H}_0(A_i) = 0$$

y el hecho de que $\text{rk } \tilde{H}_0(\partial A_i) \geq 1$ porque ∂A_i tiene al menos dos componentes conexas (una en ∂P_1 y otra en ∂P_2) se sigue que $\text{rk } H_1(A_i, \partial A_i) \geq 1$, o por dualidad de Lefschetz $\text{rk } H_1(A_i) = \text{rk } H^1(A_i, \partial A_i) \geq 1$. Por lo tanto $\chi(A_i) = 1 - \text{rk } H_1(A_i) \leq 0$.

Puesto que $i : P_2 \longrightarrow P_1$ induce isomorfismos en homología, $\chi(P_1) = \chi(P_2)$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^n \chi(A_i) = \chi(A) = \chi(P_2) - \chi(P_1) = 0,$$

lo que junto con la desigualdad $\chi(A_i) \leq 0$ que acabamos de probar demuestra que $\chi(A_i) = 0$ para toda componente A_i de A . Esto implica que cada A_i es un anillo, lo que puede verse como sigue: peguemos r_i discos sobre A_i para deshacernos de su borde y obtener una superficie compacta y conexa \hat{A}_i . Sabemos ya que $r_i \geq 2$ porque ∂A_i tiene al menos dos componentes, y $\chi(\hat{A}_i) = \chi(A_i) + r_i = r_i \geq 2$, luego por el teorema de clasificación de superficies necesariamente \hat{A}_i es una esfera y $r_i = 2$. De este modo A_i es el resultado de eliminar de una esfera dos discos disjuntos: un anillo. \square

Estamos ya en condiciones de completar la prueba del Teorema B.2.

Demostración. (del Teorema B.2) Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base decreciente de entornos de K en M como la construida en el Lema B.3. Como en la cadena de inclusiones

$$K \xrightarrow{i_{n+1}} P_{n+1} \xrightarrow{i_{n,n+1}} P_n$$

se tiene que tanto i_{n+1} como $i_n = i_{n,n+1} \circ i_{n+1}$ inducen isomorfismos en cohomología de Čech con coeficientes \mathbb{Z}_2 , se sigue que $i_{n,n+1}$ también lo hace. En virtud del Lema B.5 y la identificación natural entre cohomología de Čech y singular en el caso de

espacios que son variedades (más generalmente, ANR's) se concluye que P_n es P_{n+1} con un collar exterior añadido, de modo que P_n retracta por deformación fuerte sobre P_{n+1} y por tanto la inclusión $i_{n,n+1}$ es de hecho una equivalencia de homotopía. En consecuencia, puesto que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n = K$, se concluye que la inclusión $i : K \rightarrow P_n$ es una equivalencia *shape* para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Observación B.6. *El Teorema B.2 sigue siendo cierto sin la hipótesis de que K esté contenido en el interior de M . Para verlo, denotemos $\widehat{M} := M \cup \partial M \times [0, 1]$ la variedad M con un collar exterior añadido, donde se identifica $\partial M \times \{0\}$ con ∂M en el modo natural. Pongamos además $F : \widehat{M} \times [0, 1] \rightarrow \widehat{M}$ la deformación por retracción fuerte natural de \widehat{M} sobre M , que puede suponerse que es una aplicación lineal a pedazos. Dado U entorno de K en M , consideremos $V := F_1^{-1}(U)$, que es un entorno de K en \widehat{M} y tomemos $\widehat{P} \subseteq V$ un entorno regular de K en $\text{int}(\widehat{M})$, que existe por el Teorema B.2. Entonces $P := F(\widehat{P} \times 1)$ es un poliedro (porque \widehat{P} es un poliedro, siendo una 2-variedad) que tiene el mismo tipo de homotopía que \widehat{P} , está contenido en U y contiene a K (porque $F_t|_M = \text{id}_M$). Ahora sea Q un entorno regular de P , en sentido p.l., contenido en U (véase por ejemplo [65, pp. 32 y 33]). Q es una 2-variedad compacta que contiene a P (y por tanto a K) en su interior y tal que la inclusión $P \rightarrow Q$ es una equivalencia de homotopía (porque Q colapsa sobre P), luego en particular $K \rightarrow Q$ es una equivalencia *shape*.*

El argumento de la observación anterior se basa en que los compactos K tales que $\check{H}^0(K; \mathbb{Z}_2)$ y $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ son finitamente generados se comportan, esencialmente, como poliedros. Explotando esa misma idea puede probarse el siguiente Teorema de unicidad de entornos regulares:

Teorema B.7. *Sea K un compacto contenido en una 2-variedad M . Si P y Q son entornos regulares de K en M , existe una isotopía $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $H_0 = \text{id}_M$, $H_t|_K = \text{id}_K$ para todo $t \in [0, 1]$ y $H_1(P) = Q$.*

Demostración. Por el Teorema B.2 existe un tercer entorno regular R de K contenido en $\text{int}(P) \cap \text{int}(Q)$. Como las inclusiones $K \rightarrow R$ y $K \rightarrow P$ son equivalencias *shape*, se sigue que también lo es la inclusión $R \rightarrow P$ y en consecuencia, por el Lema B.5, $P = R \cup \partial R \times [0, 1]$. Ahora bien, es claro que $\partial R \times [0, 1]$ colapsa sobre ∂R , y en consecuencia por [65, 3.30 Corollary, p. 41] se concluye que P es un entorno regular, en sentido p.l., de R . De modo análogo también Q es un entorno regular, en sentido p.l., de R . Por el teorema de unicidad de entornos regulares [65, 3.24 Regular neighbourhood theorem., p. 38] se concluye que existe la isotopía anunciada. \square

El siguiente corolario es una versión *shape* del teorema de Whitehead, pero no se deduce inmediatamente de éste porque las hipótesis son de naturaleza homológica, y no homotópica.

Corolario B.8. *Sea K un compacto contenido en el interior de una 2-variedad compacta M . Si la inclusión $i : K \rightarrow M$ induce isomorfismos $i^* : \check{H}^k(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \check{H}^k(K; \mathbb{Z}_2)$ para $0 \leq k \leq 2$, entonces es una equivalencia *shape*.*

Demostración. Sea P una 2-variedad compacta contenida en $\text{int}(M)$ que sea entorno de K y tal que la inclusión $j : K \rightarrow P$ sea una equivalencia *shape* (existe por el Teorema B.2, ya que la cohomología de Čech de K con coeficientes en \mathbb{Z}_2 es finitamente generada por ser isomorfa a la de M , que es una variedad compacta). Entonces, de modo

análogo a como sucedía en la prueba del Teorema B.2, la inclusión $i : P \longrightarrow M$ induce isomorfismos en cohomología, y por tanto el Lema B.5 implica que M es P con un collar exterior añadido, de modo que i es de hecho una equivalencia de homotopía. Así la inclusión de K en M , que es composición de la equivalencia *shape* j y la equivalencia de homotopía i , es asimismo una equivalencia *shape*. \square

Corolario B.9. *Sea K un continuo contenido en el interior de una 2-variedad M . Si $\check{H}^2(K; \mathbb{Z}_2) = 0$ y $\check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ es finitamente generado, entonces K tiene el shape de $\bigvee^p \mathbb{S}^1$, una suma wedge de $p = \text{rk } \check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ circunferencias.*

Demostración. Tomemos P entorno compacto de K contenido en el interior de M tal que P sea 2-variedad compacta y la inclusión $i : K \longrightarrow P$ sea una equivalencia *shape*; basta demostrar que P tiene el tipo de homotopía de un bouquet de $p = \text{rk } \check{H}^1(P; \mathbb{Z}_2) = \text{rk } \check{H}^1(K; \mathbb{Z}_2)$ circunferencias.

Como $H^2(P; \mathbb{Z}_2) = \check{H}^2(K; \mathbb{Z}_2) = 0$, P ha de tener borde no vacío, digamos con componentes conexas D_1, \dots, D_r . Colapsando cada D_j a un punto d_j se obtiene una superficie cerrada \hat{P} y es claro que $\hat{P} - \{d_1, \dots, d_r\} \cong P - \partial P$, que tiene el mismo tipo de homotopía que P . Ahora podemos representar \hat{P} con su modelo plano estándar y, retirando de éste los puntos d_1, \dots, d_r , se observa que lo que queda tiene el tipo de homotopía de un bouquet de circunferencias. \square

Observación B.10. *Si, en el Corolario B.9, es $\check{H}^2(K; \mathbb{Z}_2) \neq 0$, entonces K coincide con una componente conexa de M (esto se puede probar, por ejemplo, utilizando la dualidad de Alexander).*

Bibliografía

- [1] J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. N. A. S. **10** (1924), no. 1, 8–10.
- [2] P. Ashwin and M. Timme, *Unstable attractors: existence and robustness in networks of oscillators with delayed pulse coupling*, Nonlinearity **18** (2005), no. 5, 2035–2060.
- [3] K. Athanassopoulos, *Explosions near isolated unstable attractors*, Pacific J. Math. **210** (2003), no. 2, 201–214.
- [4] ———, *Remarks on the region of attraction of an isolated invariant set*, Colloq. Math. **104** (2006), 157–167.
- [5] J. Auslander, N. P. Bhatia, and P. Seibert, *Attractors in dynamical systems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **9** (1964), 55–66.
- [6] A. Beck, *On invariant sets*, Ann. of Math. **67** (1958), no. 1, 99–103.
- [7] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 161, Springer-Verlag, 1970.
- [8] S. A. Bogatyĭ and V. I. Gutsu, *On the structure of attracting compacta*, Differentialnye Uravneniya **25** (1989), no. 5, 907–909, 920.
- [9] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne, Tom 44, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1967.
- [10] ———, *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. **62** (1968), 223–254.
- [11] ———, *On several problems of the theory of shape*, Studies in topology : proceedings of a Conference held at Charlotte, North Carolina, march 14-16, 1974 (M. Stavrakas and K. Allen, eds.), Academic Press, 1975, pp. 67–79.
- [12] ———, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne, Tom 59, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.
- [13] G. E. Bredon, *Wilder manifolds are locally orientable*, Proc. N. A. S. **63** (1969), no. 4, 1079–1081.
- [14] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 74–76.

- [15] M. Brown and H. Gluck, *Stable structures on manifolds. I. Homeomorphisms of \mathbb{S}^n* , Ann. of Math. (2) **79** (1964), 1–17.
- [16] W. C. Chewning and R. S. Owen, *Local sections of flows on manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), no. 1, 71–77.
- [17] R. C. Churchill, *Isolated invariant sets in compact metric spaces*, J. Diff. Eq. **12** (1972), 330–352.
- [18] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, TMH, 1991.
- [19] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38, American Mathematical Society, 1978.
- [20] C. Conley and R. Easton, *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 35–61.
- [21] C. Conley and E. Zehnder, *Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), no. 2, 207–253.
- [22] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [23] J. Dydak and J. Segal, *Shape theory. An introduction*, Lecture Notes in Mathematics, 688, Springer, 1978.
- [24] Thomas E. S., Jr., *One-dimensional minimal sets*, Topology **12** (1973), 233–242.
- [25] R. W. Easton, *Geometric methods for discrete dynamical systems*, Oxford Engineering Science Series, 50, Oxford University Press, 1998.
- [26] R. D. Edwards, *The solution of the 4-dimensional annulus conjecture (after Frank Quinn)*, Four-manifold theory (C. Gordon and R. Kirby, eds.), Contemp. Math., vol. 35, Amer. Math. Soc., 1984, pp. 211–264.
- [27] A. Giraldo, M. A. Morón, F. R. Ruiz del Portal, and J. M. R. Sanjurjo, *Shape of global attractors in topological spaces*, Nonlinear Anal. **60** (2005), no. 5, 837–847.
- [28] A. Giraldo and J. M. R. Sanjurjo, *On the global structure of invariant regions of flows with asymptotically stable attractors.*, Math. Z. **232** (1999), no. 4, 739–746.
- [29] B. Günther and J. Segal, *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 1, 321–329.
- [30] C. Gutiérrez, *Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 1, 17–44.
- [31] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons., 1964.
- [32] H. M. Hastings, *A higher-dimensional Poincaré-Bendixson theorem*, Glas. Mat. Ser. III **14** (**34**) (1979), no. 2, 263–268.
- [33] H. M. Hastings and A. Heller, *Homotopy idempotents on finite-dimensional complexes split*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 4, 619–622.

- [34] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [35] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, No. 33, Springer-Verlag, 1976.
- [36] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1961.
- [37] S. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, 1965.
- [38] J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [39] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Mathematical Series, v. 4, Princeton University Press, 1948.
- [40] A. Kadlof, *On the shape of pointed compact connected subsets of E^3* , Fund. Math. **115** (1983), no. 2, 163–1932.
- [41] L. Kapitanski and I. Rodnianski, *Shape and Morse theory of attractors*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 2, 218–242.
- [42] R. C. Kirby, *Stable homeomorphisms and the annulus conjecture*, Ann. of Math. **89** (1969), 575–582.
- [43] J. P. Lee, *Homotopy groups of the isotropy groups of annulus*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 213–217.
- [44] E. Dyer M.-E. Hamstrom, *Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold*, Duke Math. J. (1958), no. 25, 521–531.
- [45] S. Mardešić and J. Segal, *Shape theory. The inverse system approach*, North-Holland Mathematical Library, 26, North-Holland Publishing Co., 1982.
- [46] B. Mazur, *On embeddings of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 59–65.
- [47] C. K. McCord, *On the Hopf index and the Conley index*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 2, 853–860.
- [48] D. R. McMillan, *Cutting off homotopies on acyclic sets*, Geometric Topology : proceedings of the geometric topology Conference held at Park City, Utah, february 19-22, 1974 (L. C. Glasser and T. B. Rushing, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 438, Springer-Verlag, 1975, pp. 343–352.
- [49] ———, *One-dimensional shape properties and three-manifolds*, Studies in topology: proceedings of a Conference held at Charlotte, North Carolina, march 14-16, 1974 (M. Stavrakas and K. Allen, eds.), Academic Press, 1975, pp. 367–381.
- [50] P. Mendelson, *On unstable attractors*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **5** (1960), 270–276.
- [51] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), no. 1, 152–182.
- [52] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

- [53] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47, Springer-Verlag, 1977.
- [54] M. A. Morón, J. J. Sánchez-Gabites, and J. M. R. Sanjurjo, *Topology and dynamics of unstable attractors*, Fund. Math. **197** (2007), 239–252.
- [55] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [56] V. V. Nemytskii, *Topological problems of the theory of dynamical systems*, Translations of the AMS **105**.
- [57] H. E. Nusse and J. A. Yorke, *Characterizing the basins with the most entangled boundaries*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 3, 895–906.
- [58] E. Outerelo and J. M. Ruiz, *Topología diferencial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.
- [59] F. Quinn, *Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5*, J. Diff. Geom **17** (1982), no. 3, 503–521.
- [60] T. Radó, *Über den Begriff der Riemannsche Fläche*, Acta Univ. Szeged **2** (1924–1926), 101–121.
- [61] F. Raymond, *Separation and union theorems for generalized manifolds with boundary*, Michigan Math. J. **7** (1960), 7–21.
- [62] ———, *R. L. Wilder's work on generalized manifolds - An appreciation*, Algebraic and Geometric Topology (K. C. Millet, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 664, Springer-Verlag, 1978, pp. 7–32.
- [63] J. C. Robinson and O. M. Tearne, *Boundaries of attractors as omega limit sets*, Stochastics and Dynamics **5** (2005), no. 1, 97–109.
- [64] R. H. Rosen, *Stellar neighborhoods in polyhedral manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 401–406.
- [65] C. P. Rourke and B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 69, Springer-Verlag, 1972.
- [66] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. AMS **291** (1985), no. 1, 1–41.
- [67] J. W. Robbin & D. Salamon, *Dynamical systems and shape theory*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8*** (1988), 375–393.
- [68] J. J. Sánchez-Gabites, *A description without index pairs of the intrinsic topology in the unstable manifold of an invariant set*, Preprint.
- [69] ———, *Dynamical systems and shapes*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **102**, no. 1, 127–159.
- [70] ———, *Unstable attractors in manifolds*, Preprint.

- [71] J. J. Sánchez-Gabites and J. M. R. Sanjurjo, *On the topology of the boundary of a basin of attraction*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no. 12, 4087–4098.
- [72] ———, *Shape properties of the boundary of attractors*, Glas. Mat. Ser. III **42(62)** (2007), no. 1, 117–130.
- [73] ———, *Multivalued maps, selections and dynamical systems*, Topology Appl. **155** (2008), no. 8, 874–882.
- [74] J. M. R. Sanjurjo, *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **69** (1994), no. 2, 330–344.
- [75] ———, *On the structure of uniform attractors*, J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), no. 2, 519–528.
- [76] ———, *Morse equations and unstable manifolds of isolated invariant sets*, Nonlinearity **16** (2003), 1435–1448.
- [77] S. Smale, *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. 3 **17** (1963), 97–117.
- [78] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw–Hill Book Co., 1966.
- [79] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
- [80] M. Timme, F. Wolf, and T. Geisel, *Unstable attractors induce perpetual synchronization and desynchronization*, Chaos **13** (2003), no. 1, 377–387.
- [81] Mitchell W. J. R., *Defining the boundary of a homology manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), no. 2, 509–513.
- [82] A. H. Wallace, *Algebraic Topology*, W. A. Benjamin, Inc., 1970.
- [83] J. E. West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk*, Ann. Math. (2) **106** (1977), 1–18.
- [84] S. Wiggins, *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences **105**, Springer–Verlag, 1994.
- [85] R. L. Wilder, *Topology of manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 32, American Mathematical Society, 1949.
- [86] ———, *Monotone mappings of manifolds*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1519–1528.
- [87] ———, *Monotone mappings of manifolds. II*, Michigan Math. J. **5** (1958), 19–23.